T 24756

2022

CTU R104 vol II Se 107

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL II

ANUL 1922—1923.

BIBLIOTECA „ASTRA"
CLUJ

TIMIȘOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească
1922

1990

'05

JAN 2004

15 MARTIE 1922. No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. CUVANT INAINTE.
2. V. ALACI. O CLASA DE IDENTITATI ALGEBRICE.
3. PROBLEME REZOLVATE.
4. NOTE MATEMATICE.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice «Cartea Românească»
1922

2450

Revista Matematică apare sub conducerea unui comitet compus din u.

Abramescu N.,	conferențiar Univ. Cluj.
Alaci Valeriu,	profesor școala Politechnică Timișoara.
Angheluță Th. Dr.	prof. Sem. Pedagogic și șc. mil. geniu București
Balaban N.,	prof. la liceul din Craiova.
Baron C.,	asist. fiz. șc. Politechnică.
Breazu D-tru	prof. liceul din Caracal
Buicliu Gh. Lt.-Col.,	prof. la șc. Politechnică.
Cândea C. Dr. Ing.,	prof. la șc. Politechnică.
Cristescu I , Ing.,	profesor șc. Politechnică.
Coman Aug.,	conf. șc. Politechnică.
Diaconescu N culae	prof. liceul din Slatina
Dumitriu-Arad I.,	prof. liceul din Arad.
Georgescu D-tru	prof. liceul din Alexandria
Lalescu Tr.,	prof. univ., prof. la șc. Politechnică din București, fost rector al șc. Politechnice din Timișoara.
Mardan D. Ing.,	dir. fabricei d tent la șc. P
Muzicescu N.,	prof. la lic. din
Noaghea Gh.,	prof. la lic. di sebeș.
Petricoane Dr.,	directorul lic. din
Stăncescu C. Dr. Ing.,	prof. șc. Politechn
Stefănescu C.,	chimist șc. Politech
Teodorescu C. C. Ing.	subdirectorul șc. Poli nice.
Țepeneag E.	directorul șc. Comercia Orșova.
Vâlcovici V.,	prof. universitar, rectorul școalei Politechnice d n Timișoara.
Vasiliu M. Ing.,	subdirectorul fabricei de tutun, asistent la șc. Politechnică.
Vlad V. V. Ing.-Arh.,	prof. șc. Politechnică.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiu problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adres **Ing. M. Vasiliu** sub-directorul Fabricei de Tutun, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

sau :

$$(12)\quad x^{10}-1=5x^4(x^2-1)+5x^2(x^2-1)^3+(x^2-1)^5$$

Identitatea trigonometrică (10) s'a transformat în identitatea algebrică (12), valabilă în virtutea observării de mai sus, pentru toate valorile reale sau imaginare ale lui x.

4. Fie identitatea[1]).

$$(13)\quad \cos^3 a \sin(b-c)+\cos^3 b \sin(c-a)+\cos^3 c \sin(a-b)=\cos(a+b+c)\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$$

In virtutea formulelor (1) ea devine :

$$(14)\quad \left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^3\frac{e^{i(b-c)}-e^{-i(b-c)}}{2i}+\left(\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\right)^3\frac{e^{i(c-a)}-e^{-i(c-a)}}{2i}+\left(\frac{e^{ic}+e^{-ic}}{2}\right)^3\frac{e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}}{2i}=\frac{e^{i(a+b+c)}+e^{-i(a+b+c)}}{2}\cdot\frac{e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}}{2i}\cdot\frac{e^{i(b-c)}-e^{-i(b-c)}}{2i}\cdot\frac{e^{i(c-a)}-e^{-i(c-a)}}{2i}$$

Simplificând cu $\frac{1}{16i}$ și notând,

$$e^{ia}=x,\quad e^{ib}=y,\quad e^{ic}=z,$$

relațiunea (14) devine :

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)+\left(y-\frac{1}{y}\right)^3\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)^3\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=-\left(xyz-\frac{1}{xyz}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)$$

Goninḍ numitorii avem :

$$(15)\quad y^2z^2(x^2-1)^3(y^2-z^2)+x^2z^2(y^2-1)^3(z^2-x^2)+x^2y^2(z^2-1)^3(x^2-y^2)=(1-x^2y^2z^2)(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2).$$

1) Culegere de Probleme de *I. Ionescu, G. Titeica A. G. Ioachimescu si V. Cristescu*, pag. 382.

Din identitatea trigonometrică (13), am obținut astfel identitatea algebrică (15), care în virtutea unei observări de mai sus, este valabilă pentru orice valori reale sau imaginare ale lui x, y și z,

Observare. Evident, că putem pune, în (15), x, y, z în loc de x^2, y^2, z^2 și obținem identitatea :

$$(16)\quad \sum xy(x-y)(z-1)^3=(1-xyz)(x-y)(y-z)(z-x),$$

5. Fie formula cunoscută :

$$(17)\quad \operatorname{tg} 4a=4\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg}^3 a}{1-6\operatorname{tg}^2 a+\operatorname{tg}^2 a}$$

Servindu-ne de relațiile (1), ea devine :

$$(18)\quad \frac{e^{4ia}-e^{-4ia}}{i(e^{4ia}+e^{-4ia})}=4\frac{\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{i(e^{ia}+e^{-ia})}-\left[\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{i(e^{ia}+e^{-ia})}\right]^3}{1-6\left[\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{i(e^{ia}+e^{-ia})}\right]^2+\left[\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{i(e^{ia}+e^{-ia})}\right]^4}$$

Notând, $e^{ia}=x$

și simplificând, relațiunea (18) devine

$$\frac{x^8-1}{x^8+1}=4\frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3}{1+6\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4}$$

sau :

$$(19)\quad 4\frac{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2}{(x^2+1)^4+6(x^4-1)^2+4(x^2-1)^4}=\frac{x^4-1}{x^8+1}$$

Din identitatea trigonometrică (17), am obținut astfel identitatea algebrică (19), care în virtutea unei observări de mai sus, este valabilă pentru orice valoare reală sau imaginară a lui x.

6. Fie identitatea trigonometrică[1]).

$$(20)\quad \frac{\sin a \sin b+\sin(a+b)\sin 2(a+b)}{\cos a \sin b+\sin(a+b)\cos 2(a+b)}=\operatorname{tg}(2a+b)$$

1) C. de. P. cit. pag. 381.

Transformând'o prin formulele (1), şi observând că putem lăsa la o parte unii numitori din ambii membri, obţinem :

$$\frac{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})+}{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})+}$$

$$\frac{+[e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}][e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}]}{+[e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}][e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}]}=$$

$$\frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}$$

Notând,

$$e^{ia}=\sqrt{x},\quad e^{ib}=\sqrt{y},$$

şi simplificând, obţinem :

$$(21)\quad \frac{xy(x-1)(y-1)+(xy-1)(x^2y^2-1)}{xy(x+1)(y-1)+(xy-1)(x^2y^2+1)}=\frac{x^2y-1}{x^2y+1}$$

Identitatea trigonometrică (20) s'a transformat astfel în identitatea algebrică (21), valabilă în virtutea unei observări de mai sus, pentru toate valorile reale sau imaginare ale lui x şi y.

Evident că putem înmulţi oricât numărul exemplelor, obţinând unele identităţi mai remarcabile.

Exemplele de mai sus sunt însă suficiente a invedera, cum plecând dela oricare identitate trigonometrică obţinem una algebrică, *cum prin urmare putem construi astfel o clasă de identităţi algebrice interesante.*

Vom reveni asupra acestei chestiuni, transformând în identităţi algebrice, unele identităţi trigonometrice, ştiind că arcele cuprinse satisfac o relaţie dată.

PROBLEME REZOLVATE

63. — *Un jucător pierde la primul joc, jumătate din suma ce avea, plus 1 leu; la al doilea, jumătatea din ce i-a rămas plus 2 lei; iar la al treilea joc pierde jumătate din ce-i mai rămăsese plus 3 lei şi termină banii. Câţi bani a avut la începutul jocului?*

I Dumitriu-Arad

I. *Soluţiune aritmetică* dată de d-nii *Florea Negretzu* cl. VI Piteşti şi *Suluţiu Aurel, Andrei Vonta, Uroş Mărienuţ, Coriolan Ciucur cl.* V *lic. „Moise Nicoară" din Arad.*

Dacă prin pierderea celor 3 lei, la ultimul joc, jucătorul a pierdut toţi banii, atunci 3 este tocmai jumătatea sumei cei mai rămăsese după al doilea joc, care este prin urmare $3\times 2=6$ lei. Va rezulta atuncea mai departe că $6+2=8$ lei, va fi jumătatea sumei ce i-a mai rămas dela primul joc, care va fi astfel $8\times 2=16$ lei. Şi cum aceasta plus 1 leu este jumătatea sumei ce avea la începerea jocului, urmează că această sumă va fi $(16+1)\,2=34$ lei.

Au dat soluţiuni analoage foarte bune Domnii: *Cristea P. Goilav* student Bucureşti *Niculae Miulescu* Şcoala Militară de Artilerie Timişoara, *Vasile Dan* cl. III. Galaţi, *Em. Iliescu-Zătreni* şi *Ion Ş. Antoniu* „Mânăstirea Dealului" Târgovişteа, şi *Bușilă Adrian* şi *M. I. Şerbănescu* cl. VI. „Mihai Viteazul" Bucureşti, *Stănculescu Sofronie* Timişoara, *Irimie Mihail* Galaţi, *Bălescu I. Cristian* Craiova, *Stoinescu A. T.* Bucureşti.

Notă. Dl *Vasile Dan* dă o generalisare aritmetică a problemei considerând că perderile fiind tot pe jumătate la sfârşit o perde jumătate plus n lei şi apoi o a doua generalisare în care pierderile sunt fracţii oarecare.

II. *Soluţiune algebrică.*

Insemnând cu x suma cu care jucătorul intră în joc, enunţul problemei ne dă ecuaţiunea :

$$x-\left(\frac{x}{2}+1\right)-\left\{\frac{x-\left(\frac{x}{2}+1\right)}{2}+2\right\}-$$

$$-\left\{x-\left(\frac{x}{2}+1\right)-\left\{\frac{x-\left(\frac{x}{2}+1\right)}{2}+2\right\}\right.$$

$$\left.\frac{}{2}+3\right\}=0$$

sau

$$\frac{x-2}{2}-\frac{x+6}{4}-\frac{x+14}{8}=0$$

sau de unde $x=34$.

Au dat asemenea soluţiuni Domnii:

a) *Studenţi Universitari: Cristea P. Goilav* Bucureşti şi *Ioan Apreutese.*

b) *Şcoli superioare speciale: Gh. N. Chirculescu* Şcoala Politehnică din Bucureşti, *Gh. C. Beşliu*

Școala Politehnică din Timișoara, *Glasberg Robert* Școala de Arhitectură București, *Mircea Popescu* Școala de Silvicultură București și *Miclescu B. Andrei, Ioan M. Popescu, Ioan M. Ioniță, I. N. Georgescu-Val, Dragomirescu-Buzne Eduard* și *Niculae Miulescu* Școala Militară de Artilerie Timișoara.

c) *Elevi Liceali:* Din clasa VIII *Solomon Asnaș.*

c) *Elevi Liceali:* Din clasa VIII-a: ***Solomon Ludovic*** Buzău, *Const. Chiorescu* Pedagog Școala Normală Botoșani, *Nicolau Alexandru* „Cantemir Vodă" București, *Solomon Asnaș* particular Călărași, *Alex. Panu* Galați, *Gust. Alex. Maguriru* Caransebeș, *Em. V. Socianu, Const. Iorgulescu, M. Gh. Săvescu* și *Octav Ulmann* Liceul-Internat Iași, *Stănculescu Sofronie, Nicolae Matei* și *Iosif Rafiroiu* „Diaconovici-Loga" Timișoara.

Din clasa VII-a: *Pavlu Eduard, Edelstein Salom, Ierimia Mihail, Pincu Katz, Măru Dumitru, Novac Herman* și *I. D. Mateescu-Buzău* Galați, *Const. Biernaschi* liceul Militar Craiova. *Bălcescu I. Cristian, I. C. Georgescu. Nicu D. Mucichescu. Nicu A. Stănescu, Dili C. Schileru, M. Gâtan* și ***Stoica Ioan*** Craiova, ***Aurel P. Sufletel*** „M-trea Dealul", Târgoviște, *Ernest G. Oprișanu* și *Nicolae Simionescu* Bârlad, *I. N. Teodorescu* și *Nicolescu Gh. Isaia* Ploești; ***Popescu S. Grigorie*** Liceul-Internat Iași, *Ștefăniu D. Vasile Husi, Harry Hirsson* Buzău, *Const E. Georgescu* „Cantemir-Vodă" București, *Jean Propst* T.-Severin, *Ion Somovici* particular Focșani.

Clasa VI-a. ***Viorel Percea*** Timișoara, ***Ion S. Antoniu*** „M-trea Dealul" Târgoviște, ***Anastasie Micinovici. Zoican A. Aurel*** și ***Ștefan Musta*** „Diaconovici-Loga" Timișoara, *Scodreanu Alexandru* și *Valentin N. Topescu* Silistra, *Popescu N. Ștefan, Florea Negretzu* și *Iordăchescu N. Nestor* Pitești, ***Popovici C. Ioan, Eugen Weisenberg*** și *Panait Ion* Galați, *Nancă N. Elius* Craiova, *Cornel Păcuraru* Caransebeș *Moisescu Virgil* Constanța, *Nicu Arcadian, Caracaș I. Ștefan, Dobrescu M. Filip* și *Ion Besceanu* Caracal, *Silion G. Ion* Câmpina. *Alex. Tauber* și *Alex. Pamula* Botoșani, *Stoenescu A. Emil* particular Brăila, ***C. I. Berdan*** și *Giotta Vincențiu* Bârlad. *Calleva M. M. I. Sorbănescu* București, ***Popa I. Teodor*** și ***Emil Ștefănescu*** „Spiru Haret" București, *Georgescu E. Florian* „Cantemir-Vodă" București. *Tiberiu Popovici. Ștefan Chiriac* și *Negreu Petru* „Moise Nicoară" Arad.

Clasa V. *Ovidiu Gh. Popea, Vulcan Ștefan, Atanasiu V. Emil* Constanța, *Atanasiu I. Dumitru* și *Vincențius B.* „M-rea Dealul" Târgoviște, ***Buttu P. Valeriu*** și *Stănescu B. Gheorghe* Ploești. *Cretu I. Adrian, Vasile Mihaiu, Lyonell Lindenberg, Ionescu T. Carol, Kassargian Aron* și *Marcel Steinbach* „Cantemir-Vodă" București, ***Ioan Ionică*** Brașov, *Dumitrescu G. Marin* Craiova. *Părăianu C. Emanoil* Tg.-Jiu.

Și Domnii: *Puiu Juster* și *I. Cosereanu* P.-Neamț *Em. Iliescu-Zătreni* și *Ion Constantinescu* Târgoviște, *Stoinescu A. I.* și *Grigorie G. Gianni* „Cantemir-Vodă" și *Dan Ionescu* „Matei-Basarab" București *Tenea M. Ioan* și *Amărăscu O. Gavril* Caracal, *I. Cioică* Strehaia, *M. Cocorandu* Brașov, *Meyer A. Nussem* Huși, *Nicu Părăianu* Pitești, *Adalbert Felix Kanner* Galați. *Lăzărescu Fl. Ștefan Giurgiu, Gh. Melinte* și ***Alex. Mitulescu, Trăian Răbăgia*** Politehnica din Timișoara, *Ciolacu St. Miron, Budișteanu R. Alexandru, Dinulescu N. Nicolae, Aurelian Popescu, Doru Raoul, M. Demetrescu, Mus Orest, I. Modrogan, Virgil C. Vasilescu, Berea Ioan, Fântânianu Ioan, Maciolla Gheorghe, I. C. Georgescu, Marinescu V. Ioan, I. E. Rădulescu, Ionel Gr. Lăzărescu, M. Mihai Gogălniceanu* și *Sorin Nicolescu.*

Notă. Domnii *Florea Negretzu, Popescu N. Ștefan, I. St. Teodorescu, Ierimia Mihail* și *Nicu Părăianu* au dat diferite generalisări **algebrice a**-acestei probleme. — Adăogăm că probleme de acest fel, trebuesc a fi rezolvite în principiu numai prin aritmetică. S'au mai primit câteva soluții însă neiscălite, cu toate că la unele data și localitatea nu lipsea!! ***M. V.***

66. *Să se afle limita expresiunei*

$$u_n = \frac{1+2\sqrt[3]{2}+\ldots+n\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt[3]{n}},$$

pentru $n=\infty$.

N. Abramescu.

Expresiunile u_n și

$$u_{n+1} = \frac{1+2\sqrt[3]{2}+\ldots+n\sqrt[3]{n}+(n+1)\sqrt[3]{(n+1)}}{(n+1)^2\sqrt[3]{n+1}}$$

au aceiași limită u pentru $n=\infty$. Din expresiunile lui u_{n+1} și u_n deducem respectiv

$$(n+1)^2\sqrt[3]{n+1}\,u_{n+1} = 1+2\sqrt[3]{2}+\ldots+n\sqrt[3]{n}+(n+1)\sqrt[3]{n+1},$$

$$n^2\sqrt[3]{n}.u_n = 1+2\sqrt[3]{2}+\ldots+n\sqrt[3]{n};$$

de unde, scăzându-le,

$$(n+1)^2\sqrt[3]{n+1}.u_{n+1} - n^2\sqrt[3]{n}.u_n = (n+1)\sqrt[3]{n+1}.$$

Insă, $\lim u_{n+1} = \lim u_n = u$; deci, la limită, din egalitatea precedentă, deducem

$$u\lim\left[(n+1)^2\sqrt[3]{n+1}-n^2\sqrt[3]{n}\right] = \lim(n+1)\sqrt[3]{n+1}$$

$$u = \lim\frac{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)^2\sqrt[3]{n+1}-n^2\sqrt[3]{n}},$$

$$u = \lim\frac{(n+1)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)^{\frac{7}{3}}-n^{\frac{7}{3}}}.$$

Să facem înlocuirea

$$(n+1)^{\frac{1}{3}} = \alpha,\ n^{\frac{1}{3}} = \beta;$$

avem $$u = \lim \frac{\alpha^4}{\alpha^7 - \beta^7},$$

$$u = \lim \frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)(\alpha^6+\alpha^5\beta+\ldots+\alpha\beta^5+\beta^6)}.$$

Inlocuind pe α și β cu valorile lor, avem

$$u = \lim \frac{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^6}+\sqrt[3]{(n+1)^5}.\sqrt[3]{n}+\ldots+\sqrt[3]{n^6}}$$

Insă

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \alpha-\beta = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$$

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt[3]{n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1).n}+\sqrt[3]{n^2}}.$$

Deci, înlocuind în valoarea lui n, obținem

$$u = \lim \frac{(n+1)\sqrt[3]{n+1}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2}\right]}{\sqrt[3]{(n+1)^6}+\sqrt[3]{(u+1)^6.n}+\ldots+\sqrt[3]{n^6}}$$

Se vede că în numărătorul și numitorul acestei fracții puterea cea mai înaltă a lui n este 2; împărțind deci ambii termeni ai acestei fracții cu n^2, avem

$$u = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1\right]}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^6}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5}+\ldots+1}$$

și deci când $n = \infty$,

$$u = \frac{3}{7}.$$

Limita expresiunei considerate este deci $\frac{3}{7}$.

Problema a fost rezolvată de dnii: *Cr. Goilav, R. Glasberg, H. Hirson, C. Iorgulescu, I. Niescu, D. Ionescu, A. Nicolau, G. Popescu, I. Popovici, N. Pârâianu, M. Serbanescu, D. Schileru, M. Savescu, N. Stanescu, A. Scodreanu, G. Vincentiu, O. Ulman, I. Fântânianu, C. E. Georgescu, N. Georgescu-Roegen, Florian E. Georgescu, Traian Dordea.*

Observare. Problema se poate generaliza și se rezolvă la fel în cazul

$$u_n = \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$$

unde p este un număr comensurabil (fracție ordinară); în cazul problemei, $p = \frac{4}{3}$. Problema are soluție și când p este oarecare, limita fiind $\frac{1}{p+1}$ dar *demonstratia riguroasa* (nu ca cea dată de unii din corespondenții noștri) nu poate fi expusă în această revistă, căci ea depășește cadrul cunoștințelor cititorilor cărora se adresează.

N. A.

68. — *Să se găsească baza sistemului de numerație, în care 140 să se scrie 257 și să se generalizeze.*

M. Vasiliu

Fie x baza sistemului de numerație necunoscut, după datele problemei putem scrie

$$(2x+5)x+7 = 140.$$

sau $$2x^2+5x-133 = 0$$

de unde scoatem $x_1 = 7$, $x_2 = -9\frac{1}{2}$ din care evident trebue să aruncăm soluția negativă. Prin urmare baza sistemului de numerație căutat este 7.

Generalizare. — Din aproape în aproape să vede că gradul ecuației care ne dă baza sistemului căutat, crește în aceiași măsură cu numărul cifrelor numărului, cum să scrie în noua bază și dar ea prezintă dificultate la rezolvire, din ce în ce mai mari. Avându-se însă în vedere că soluțiile vor trebui să fie întregi și positive, de multe ori se poate ajunge ușor la rezultat. Dacă este vorba de numărul N, care să se scrie cu baza x sub forma: $a_1a_2a_3-.a_n$ unde a_1, a_2, $-.a_n$ sunt diferitele lui cifre, atunci va trebui să avem ecuațiunea:

$$a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_2x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}x+a_n-N=0$$

care se va da numai o soluție pozitivă și $n-2$ soluții negative sau imaginară.

Observare. Numărul 260 în sistemul de bază 7 se scrie tot 140. In acest sistem numărul 257 este egal cu 260.

Au rezolvat problema foarte bine d-nii: *Cristea Goilav* student București, *R. Glasberg* student architectură București, *Mircea Gh. Savescu* cl. VIII liceul „Internat" Iași.

Din cl. VII liceală au rezolvit d-nii: *Traian A. Dordea* Târgoviște, *Edelstein Salom, Pincu Katz, V. Dan* și *Ion I. Iliescu* din Galați, *I. C. Georgescu, Dili C. Schileru* și *M. Gatan* din Craiova.

Din cl. VI liceală au rezolvit problema d-nii: *Popescu M. Stefan* și *Florea Negretzu* Pitești, *Tiberiu Popovici* Arad, *Viorel Percea* Timișoara, *N. Georgescu-Roegen* și *Ion S. Antoniu*, „Mânăstirea Dealul", Târgoviște, *G. I. Silion* Câmpina *Popovici Gr. Ion* Galați, *Emil Stefanescu* și *Popa I. Teodor* „Spiru-Haret" București.

Din cl. V liceală au rezolvit problema d-nii: *Dumitrescu G. Marin* Craiova, *Atanasiu Dumitru* „Mănăstirea Dealul" Târgoviște și *Ovidiu Gh. Popa* Constanța.

Asemenea și d-nii: *Nicu B. Stanescu, Stoenescu A. S.* „Cantemir-Vodă" București, *Gr. C. Moisii, Nicu Paraianu, Puiu Juster, Dan Ionescu* București, *I. Cosereanu, Iliescu Emilian.*

S'au mai primit și încă câteva soluțiuni neiscălite. Rugăm pe colaboratorii noștri, să nu piardă niciodată lucrul acesta din vedere.

74. *Care este limita produsului.*

$$P = \sqrt[2]{10} \cdot \sqrt[4]{100} \cdot \sqrt[8]{1000} \cdot \sqrt[16]{10.000} \ldots .$$

când numărul factorilor este infinit.

Locot. Grigore Zapan

Acest produs putem să-l mai scriem succesiv:

$$P = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{2}{2^2}} \cdot 10^{\frac{3}{2^3}} \cdot 10^{\frac{4}{2^4}} \ldots 10^{\frac{n}{2^n}} \ldots .$$

$$P = 10^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}+\ldots .}$$

de unde se să vede, că este destul a afla suma seriei indefinite:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} + \ldots .$$

când n tinde la infinit și atuncea limita produsului considerat va fi $P = 10^s$

Seria aceasta este în adevăr convergentă, căci avem:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{pentru } n = \infty .$$

Pentru a afla limita acestei serii, procedăm în modul următor prin descompunere într'o sumă de alte serii cunoscute:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} +$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} +$$

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} +$$

$$\frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} +$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} +$$

. . . . .

care sunt niște progresiuni geometrice descrescătoare pe care însumându-le succesiv, vom avea:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} + \ldots$$

sau

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots$$

care la rândul lor, aceste sume formează o nouă progresiune geometrică descrescătoare, și prin urmare avem final

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Revenind la produsul P, vom avea, pentru limita lui

$$P = 10^2 = 100.$$

Au dat soluțiuni astfel Domnii:
Aurel I h. Nicolau student București.
Școli speciale: Cristea Goilav student București, *Robert Glasberg* student Arhitectură București *Popescu M. Ioan, Miclescu B. Andrei, Ioan M. Ioniță, I. N. Georgescu-Val* și *Nic. Miulescu* Elevi Școala militară de Artilerie Timișoara.

D-l *I. N. Georgescu-Val* observă că o problemă analoagă cu aceasta este și următoarea:

Care este limita produsului

$$P = \sqrt[2]{10} \cdot \sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[4]{1000} \ldots \sqrt[n]{10^{n-1}}.$$

când numărul factorilor crește la infinit?

propusă tot de d-l locot. Zapan la o teză și care se rezolvă la fel, găsindu-se astfel ca limită numărul 10.

Din clasa VIII liceală:
M. Gh. Săvescu, Antistescu V., Em. V. Soceanu, Const. Iorgulescu, Octav Uhlman și ***Gh. D. Poposcu*** Liceul-Internat Iași.
Dumitru N. Bratu Buzău. *Adalbert Kanner* și *L. Focșănianu* Galați, *Stoenescu I. Alexandru* și *Tuducescu S. Nicolae* „Mihai Viteazul" București. *Const. Chiorescu* „Laurian" Botoșani și pedagog la Școala Normală.
Din clasa VII liceală:
M. Gâtan, Nicu A. Stănescu, Nicu D. Muscheșcu, I. C. Georgescu, Dili C. Schileru și *I. D. Doru Raoul M. Demetrescu* Craiova, *Ion I. Iliescu I. D. Mateescu-Buzău, Măru Dumitru, Dinulescu N. Nicolae, Pavlu Eduard* și *Pincu Katz* Galați, *Popescu N. Ștefan* Pitești, *Ioan Fântânianu* și *Const. E. Georgescu* „Cantemir-Vodă" București, *T. Georgescu, și Virgil Vasilescu Ploești, Nicu'ă Theodoru* și *Vasile Ștefăniu* „Cuza-Vodă" Huși, *Eugen Ionică* Liceul Real Brașov, *Aurel P. Sufletel* și *Trăin A. Dordea* Liceul Militar „M-rea Dealul" Târgoviște, *Gh. B. Mărculescu* Liceul „Lazăr" București, *Michel Lemeș* Bacău, *S. Somovici* Focșani, *Puiu Bacalu* și *V. Dan* Galați.
Din clasa VI liceală:
Giotta Vincențiu Bârlad, *Tiberiu Popovici* Liceul „Moise Nicoară" Arad, *Alexandru Tauber* Botoșani, *Valeriu I. Stamatescu* București, *Alex. Scodreanu* și *Rosetel Bojin* liceul „Durostor" Silistra, *A. N. Nancă* Craiova, *Bogdan S. Martinian* Caracal, *Alexandru Niculescu* „Matei Basarab" București, *A. I. Stoenescu* și *Florian Er. Georgescu* „Cantemir-Vodă" București, *N. Georgescu-Roegen* „M-rea Dealul" Târgoviște.
Precum și Domnii: C. V. Filip Constanța, *I. Cosereanu* Piatra-Neamț, *Iosif Freifeld* Botoșani, *Melinte Gh., Nicu Pârâianu* Pitești, *N. S. Ciorănescu, Dan Ionescu* București și *Alex. Mitulescu.*

Diferiți colaboratori au generalizat problema în alte moduri de cât cea semnalată a d-lui locot. Zapan.

Remarcăm în special grupul domnilor din cl. VII dela liceul din Galați, considerând produsul

$$P = \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p^2]{a^2} \cdot \sqrt[p^3]{a^3} \cdot \sqrt[p^4]{a^4} \ldots \sqrt[p^n]{a^n} \ldots$$

și discutând existența limitei lui când $\frac{1}{p} < 1$ și când se capătă.

$$P = a^{\frac{p}{(p-1)^2}}$$ care pentru $a = 10$, $p = 2$, ne

dă problema d-lui locot. Zapan. Generalizarea este interesantă însă perfecta analogie la toți acești domni elevi, denotă o simpatie reciprocă în rezolvarea problemelor în mod comunist.

D-l *Dili Schileru* arată că prin generalizarea chestiunei, să pot efectua produse de natură diferite, ca de exemplu

$$P = \sqrt[\operatorname{tg} x]{\operatorname{ctg} x} \cdot \sqrt[\operatorname{tg}^2 x]{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \sqrt[\operatorname{tg}^3 x]{\operatorname{ctg}^3 x} \ldots$$

a cărui limită pentru $x = \frac{\pi}{2}$ indică numărul 1.

D-l *I. Samovici* rezolvă problema în mod original, deosebit de modul mai sus indicat, servindu-să și de Teorema lui Hôpital.

D-l *A. I. Stoenescu* pleacă dela produsul

$$P = \sqrt[\alpha]{\beta} \cdot \sqrt[\alpha r^2]{\beta^2} \cdot \sqrt[\alpha r^3]{\beta^4} \ldots$$

arătând că are de limită pe $\beta^{\frac{\alpha}{1}\,\frac{r}{(1-r)^2}}$ și prin particularizare ajunge la problema considerată.

D-l *N. Georgescu-Roegen* pleacă dela

$$P = \sqrt[a^q]{A^{q}} \cdot \sqrt[a^{q+x}]{A^{q+x}} \cdot \sqrt[a^{q+2x}]{A^{q+2x}} \ldots$$

D-l *Nicu Pârâianu* pleacă asemenea dela o astfel de generalizare. Unul din corespondenții noștri dela Ploești, ajunge că limita produsului este numărul *e* când numărul factorilor este infinit, și când unul sau mai mulți din ei cresc la infinit (?!) limita este infinit. Admirăm felul de lucru a colaboratorului nostru!? dar îl sfătuim să nu ne mai provoace asemenea admirații. In fine ne-au mai

sosit și multe soluții neiscălite. Domnii colaboratori, trebue a fi mai cu multă atenție când își fac expedițiile de manuscrise.

M V.

72. — *Să se arate că expresiunea:*

$$x(x-1)^3[(x-1)^{5m-2}+1]+1$$

este divizibilă prin $x(x-1)(x^2-2x+2)+1$.

Th Angheluta

Soluțiune dată de d-l *Nicu Pârâianu* cl. VII liceul „Brătianu" din Pitești.

Insemnând cu P expresiunea dată, avem:

$$P=x(x-1)^3[(x-1)^{5m-2}+1]+1=$$
$$=x(x-1)(x-1)^{5m}+x(x-1)^3+1$$

și cu E expresiunea prin care trebuia să se dividă avem de asemenea:

$$E=x(x-1)(x^2-2x+2)+1=$$
$$=x(x-1)[(x-1)^2+1]+1=x(x-1)^3+x(x-1)+1$$

Observăm însă că

$$(x-1)^5=x^5-5x^4+10x^2-10x+5-1=$$
$$=x^5-3x^4-2x^4+4x^3+6x^3-2x^2-8x^2+$$
$$+x+4x-2+1=x^4(x-2)-3x^3(x-2)+$$
$$+4x^2(x-2)-2x(x-2)+(x-2)+1=$$
$$=(x-2)(x^4-3x^3+4x^2-2x+1)+1=$$
$$=(x-2)[x(x^3-3x^2+3x-1)+x(x-1)+1]+1=$$
$$=(x-2)[x(x-1)^3+x(x-1)+1]+1=$$
$$=(x-2)E+1.$$

Și atunci expresiunea P devine:

$$P=x(x-1)[(x-1)^5]^m+x(x-1)^3+1=$$
$$=x(x-1)[(x-2)E+1]^m+x(x-1)^3+1=$$
$$=Ax(x-1)(x-2)E+x(x-1)+x(x-1)^3+1=$$
$$=Ax(x-1)(x-2)E+E=E[Ax(x-1)(x-1)+2]$$

punându-se pentru A, tot ce rămâne în paranteza desvoltării binomului la puterea m, când se scoate în factori $(x-2)$ în cei dintâi primi m termeni, din care se vede în adevăr că P este divizibil cu E.

Soluțiuni analoage au dat și d-nii:

Em. V. Soceanu, Gh. D. Popescu, și *Ulman Octav* elevi cl. VIII liceul Internat Iași, scriind

$$P=x[(x-1)^{5m+1}+(x-1)]+1 \quad \text{și}$$
$$E=(x-1)^4+(x-1)^3+(x-1)^2+(x-1)+1$$

și observând că $(x-2)P$ cu $(x-2)E$ vor fi divizibili odată cu E și P, și făcând din cauza formei $(x-2)E=(x-1)^5-1$, $x-1$ egale cu 1, care anulează pe $(x-2)P$.

D-l *Stoenescu I. Alexandru* cl. VIII „Mihai-Viteazul" București, observă punând $x-1=X$ sau $x=X+1$, că problema se reduce a arăta că

$$P=X^{5m+2}+X^{5m+1}+X^4+X^3+1$$

să divide cu $E=X^4+X^3+X^2+X+1$

și după ce scrie P sub o formă convenabilă în urma unor discuții, ajung la rezultatul, ca fiecare coloana a tabloului să divide cu E și prin urmare toată expresiunea P, dând și câtul

$$X^{5m-2}-X^{5m-4}+X^{3m-7}-X^{5m-9}+..+$$
$$+X^8-X^6+X^3-X+1.$$

La fel rezolvă problema și d-l *Adalbert F. Kanner* cl. VIII liceul „Alexandri" Galați, însă evitând tabloul și discuțiile, sub o formă mai simplă.

Prin unele din metodele mai sus indicate alterate cu oarecare mici modificări, sau prin unele particularisări și arătări din aproape în aproape, au rezolvit problema și domnii următori din cl. VI liceală:

Amarascu O. Gavril și *Bogdan I. Martinian* liceul din Caracal, *I. M. Serbanescu* „Mihai-Viteazul" București, *Alex. Niculescu* „Matei-Basarab" București, *Valeriu I. Stamatescu* București, *Emil Stefanescu* „Spiru-Haret" București, *I. Musta* liceul „Diaconovici-Loga" Timișoara și *Stoenescu Al. I.* „Cantemir-Vodă" București.

NOTE MATEMATICE

Asupra unei Teoreme din Geometria plană. Se cunoaște Teorema: *In ori și ce patrulater inscriptibil convex, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse* și se știe și ce demonstrație are, prin considerarea unui patrula-

ter oarecare și arătarea, că într'un asemenea patrulater produsul diagonalelor este mai mic ca suma produselor laturilor opuse și că pentru a deveni egale, acesta trebuie să fie inscriptibil. Demonstrația e puțin cam lungă, însă are meritul că-i istorică și că evidențează clar deosebirea într'un patrulater inscriptibil și unul neinscriptibil. In anii trecuți ai „Gazetei Matematice", știu că s'au dat diferite demonstrații directe a acestei teoreme, însă nu am cunoștința anume cum au fost. De aceia, în cele ce urmează, dau o demonstrație a acestei relații, bazat pe teoremele ce se fac înaintea ei, așa cum se prevede în toate tratatele de geometrie. Teorema pe care ne bazăm în special este că: *Produsul a două laturi ale unui triunghiu, este egal cu produsul diametrului cercului circumscris prin înălțimea relativă celei de a treia laturi.*

Fie ABCD patrulaterul inscriptibil în cercul O de raza R. Prin vârful B, ducem o paralelă la diagonala AC a acestui patrulater, care taie cercul în punctul E.

Vom avea EC = AB, BC = AE ca subîntinzind arcuri egale. Triunghiul ECD ne dă

$$EC.CD = AB.CD = 2R.CF$$

CF fiind înălțimea scoborîtă din C pe baza ED. Asemenea din triunghiul EAD avem:

$$EA.AD = BC.AD = 2R.AH$$

AH fiind perpendiculara dusă din A pe DE. Prin adunare găsim:

$$AB.CD + BC.AD = 2R\,(CF + AH) \qquad (1)$$

Ducem diametrul DO, care taie cercul în punctul I și fie L intersecția dreptelor AC și DE.

Triunghiurile DBI și CFL sunt asemenea, căci fiind dreptunghice au egale unghiurile BID și CLF ca având aceleași măsuri pe cerc. In adevăr

$$\sphericalangle CLF = \frac{\text{arc } CE + \text{arc } AD}{2} =$$

$$= \frac{\text{arc } AB + \text{arc } AD}{2} = \sphericalangle BID$$

Din asemănarea lor deducem:

$$\frac{BD}{2R} = \frac{CF}{CL} \quad \text{de unde} \quad BD = 2R.\frac{CF}{CL} \qquad (2)$$

Dar triunghiurile dreptunghice CFL și ALH fiind iar asemenea, rezultă:

$$\frac{CF}{CL} = \frac{AH}{AL} = \frac{CF + AH}{CL + AL} = \frac{CF + AH}{AC}$$

de unde

$$AC = (CF + AH)\frac{CL}{CF}$$

pe care înmulțind'o cu relația (2) avem:

$$BD.AC = 2.R\,(CF + AH) = AB.CD + BC.AD$$

ținând seama și de (1), adică ceiace era de arătat.

Gh. M Vasiliu
Inginer silvic.

Asupra problemei No. 39. (R. M. T. 11). In această problemă se demonstrează câteva relațiuni între elementele triunghiului ABC. Vreau ca să stabilesc de asemenea niște relațiuni interesante asupra acestui triunghiu. Să demonstrăm următoarele relațiuni, ținând seamă de notațiunile date:

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{2R - a}{2R + a}, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{(b^2 + c^2)(b^2 - c)}{a}},$$

$$4\overline{AD}^2 = a^2 - b^2 + 3c^2.$$

1°. — Pentru demonstrarea primei formule, ne servim de teorema lui Ptolemeu pe care o aplicăm patrulaterului ABCM, când obținem:

$$BC.AM + AB.CM = AC.BM$$

sau ținând seamă de notațiunile date:

$$ac + 2cR = b\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Aceasta devine succesiv:

$$c\,(2R + a) = b\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

$$c^2\,(2R + a)^2 = b^2(4R^2 - a^2)$$

$$c^2\,(2R + a) = b^2\,(2R - a)$$

$$\therefore \frac{c^2}{b^2} = \frac{2R - a}{2R + a} \qquad (1)$$

2°. — După o teoremă cunoscută a proporțiilor scoatem din (1):

$$\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}=\frac{2a}{4R}=\frac{a}{2R}.$$

$$\therefore \frac{1}{a}\cdot\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}=\frac{1}{2R}. \qquad (\alpha)$$

Insă după figură:

$$b^2+c^2=4R^2. \quad \therefore (b^2+c^2)=16R^4. \qquad (\beta)$$

Inmulțind (α) cu (β):

$$\frac{(b^2+c^2)(b^2-c^2)}{a}=8R^3$$

$$\therefore R=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{(b^2+c^2)(b^2-c^2)}{a}}. \qquad (2)$$

3°. — Din triunghiul ADB, deducem:

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2. \quad \text{Insă: } BD=\frac{BM}{2}.$$

Deci; $4\overline{AD}^2=4\overline{AB}^2-\overline{BM}^2.$

De oarece: $4\overline{BM}^2=\overline{CM}^2-\overline{BC}^2,$

atunci: $4\overline{AD}^2=4\overline{AB}^2-\overline{CM}^2+\overline{BC}^2.$

Ținând seamă de notațiunile date și considerând relația demonstrată: $4R^2=b^2+c^2$, obținem:

$$4AD^2=4c^2+a^2-b^2-c^2.$$

$$\therefore 4\overline{AD}^2=a^2-b^2+3c^2. \qquad (3)$$

Se pot demonstra de asemenea o mulțime de relații, dar acestea par mai interesante.

Const. E. Georgescu.
Cl. VII. Lic. „Cantemir" București.

Asupra problemei 45. Acestei probleme i s'a dat la pag. 151 o soluție analitică. Vreau să-i dau o soluție geometrică:

Fie N punctul de contact. Dacă ducem B'C' paralelă la AB, avem de pe figură;

$$\frac{PN}{AB}=\frac{DN}{DB}=\frac{AM}{DN+NB}=\frac{AM}{AM+NB} \qquad \text{și}$$

$$\frac{NQ}{BB'}=\frac{NQ}{AB}=\frac{NE}{BE}=\frac{BE+NB}{AM}=\frac{AM+NB}{AM}$$

căci $AM=DN=BE.$

Dacă înmulțim aceste două:

$$\frac{\overline{PN}\times\overline{NQ}}{\overline{AB}^2}=1 \quad \therefore \overline{PN}\times NQ=\overline{AB}^2$$

Locul lui N este deci o iperbolă*) care trece prin B și are drept asimptote C'B' și AC.

D. Panaitescu.
Str. Polizu 11, București.

Asupra problemei No. 41. Dăm aci o demonstrație mai simplă. Avem relațiunile cunoscute

$$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S} \quad \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S} \quad \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$$

pe care înlocuindu-le în relația cerută căpătăm:

$$\frac{1}{r}=\frac{a\cos B+a\cos C+b\cos A+b\cos C+c\cos A+c\cos B}{2S}=$$

$$=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2pr}=\frac{1}{r}$$

având astfel o soluțiune mai simplă.

Emil Stefanescu.
Cl. VI. R. Lic. Sp. Haret.

Proba împărțirii. Fie împărțirea

758374 : 827 = 917 și rest 15

O regulă analoagă cu aceea pentru proba înmulțirii dată de d-l C. T. în No. 11 al R. M. T., ar fi următoarea: Se adună cifrele deîmpărțitului până rămânem cu o singură cifră. Astfel suma cifrelor deîmpărțitului este 34, adunând încă odată avem 3 + 4 = 7. Procedăm în acelaș mod cu împărțitorul, câtul și restul obținând respectiv 8, 8, 6,

$$8\times 8+6=70.$$

Procedând și cu acest număr ca mai sus, obținem 7, cifră căpătată la deîmpărțit. Aceasta arată că operația e bună.

Busila Adrian.

*) Vezi Tr. Lalescu, Geom. Analitică. Fasc. II, pag. 84.

PROBLEME PROPUSE

100, Fie P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, ..., P_1, personagiile unei piese de teatru, în ordinea însemnătăţii lor. In timpul reprezentaţiei să zice că scena să schimbă ori de câte ori să schimbă personagiile. Considerând că P_n este personagiul principal şi că în piesa care se joacă sunt combinate toate scenele diferite care se pot face aşa fel ca o aceiaşi scenă să nu se mai repete, iar un personagiu oarecare P_k să intre numai în scene, cu cel mult $k+1$ personagii, dintre primele k personagii mai principale, (numai personagiul principal P_n putând rămâne şi singur), se cere a se determina numărul personagiilor din această piesă, ştiind că în mijlociu o scenă durează 3 minute şi că reprezentaţia totală, exceptând pauzele, durează 2 ore şi 45 minute.

Gh. Zapan

101. Zece soldaţi: doi munteni, doi ardeleni, doi basarabeni, doi bucovineni şi doi dobrogeni sunt aşezaţi în rând într'o ordine oarecare. Comandantul lor voind să-i aşeze câte doi pe provincii, a reuşit a o face mutând totdeauna un soldat peste alţi doi. Cum au fost ei aşezaţi la început, dacă primul soldat a fost muntean, iar grupele de câte doi să succedă în ordinea citată mai sus.

I. Dumitriu-Arad.

102. Dacă p reprezintă un număr prim şi a un număr nedivizibil cu p, să se arate că expresiunea:

$$E = a \times 2a \times 3a \times \ldots \times (p-1)a + 1$$

este divizibilă cu p.

Locot. Grigore Zapan

103. Să se facă calculabilă prin logaritmi, expresiunea următoare:

$$E = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 5a + \operatorname{tg} 7a}{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} 3a - \operatorname{ctg} 5a + \operatorname{ctg} 7a}$$

M. Sarian

104. Notaţiile între elementele unui triunghiu fiind cele obicinuite, să se demonstreze relaţiunea:

$$S = r^2\left(\frac{r_b + r_c}{a} + \frac{r_c + r_a}{b} + \frac{r_a + r_b}{c}\right)$$

Gh. D Popescu

105. Fie D şi E picioarele bisectriţelor unghiului A a unui triunghiu ABC şi M mijlocul laturei BC. Să se demonstreze că:

$$\frac{ME}{MD} = \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2$$

în care b şi c sunt laturile AC şi AB.

Locot -Col. Gh. Buicliu

106. Se uneşte un punct fix A al unui cerc O cu un alt punct mobil al său P şi se ia pe prelungirea lui AP un segment AP = PB. Să se afle locul geometric al intersecţiei razei OP cu perpendiculara dusă în B la dreapta APB.

M. Vasiliu

107. Se dă în plan patru drepte: Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 aşa fel, în cât punctul de intersecţie A al dreptelor Δ_1, Δ_2, precum şi punctul de intersecţie B al dreptelor Δ_3, Δ_4, sunt în afară de cadrul desenului. Să se traseze în plan o dreaptă oarecare Δ, paralelă cu AB.

M. Nicolau

108. Să se arate că:

$$\sum_{p=2}^{n} (C_p^2)^2 + \frac{1}{2}(C_{n+1}^2)^2 = \frac{1}{20} S_2 (3n^2 + 3n + 4)$$

unde S_2 este suma patratelor primelor numere şi C_p^2 este numărul combinărilor.

Th. Angheluta

109. Se împarte un cerc n părţi egale, iar în fiecare punct de diviziune se aplică respectiv forţele

$$F \times i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

care face cu tangenta la cerc în acel punct unghiul $\frac{360^0}{i}$. Se cere, direcţia şi intensitatea rezultantei.

Lt I. Lintes

110. Cu câţi condensatori de capacitatea k, şi cum grupaţi, să obţine exact capacitatea $\frac{18}{13}k$?

I. D. Cernatescu

INFORMATIUNI

Revista Matematică din Timișoara apare regulat la 15 ale fiecărei luni. Abonamentele se încep cu No. 1 pe un an întreg adică 12 numere și nu se fac pe termene mai scurte de un an. Costul abonamentului pentru un an de zile este de 30 lei.

Volumul I, conținând broșate la un loc cele 12 numere apărute în primul an se găsesc de vânzare cu costul de lei 40 volumul. Cererile se vor adresa d-lui *Ing. C. C. Teodorescu*, subdirectorul școalei Politechnice din Timișoara.

Abonații sunt rugați ca să comunice din vreme schimbările de adresă pentru a se putea trimete revista la adresa exactă. Altfel nu vom putea completa lipsurile de numere. In fiecare scrisoare abonații vor indica și numărul chitanței de abonament pentru a putea fi găsiți în registru.

Soluțiile problemelor propuse în revistă se vor trimete pe adresa d-lui *Ing.* M. *Vasiliu*, subdirectorul Fabricei de tutun Timișoara.

Problemele rezolate se vor scrie citeț, cu cerneală, pe o singură parte a hârtiei și fiecare problemă pe o foaie separată. Când o problemă ocupă mai mult loc, se vor lipi foile una de alta. Figurile se fac pe aceiași foaie sau pe o foaie separată ce se va lipi de problemă.

In capul paginei se pune numărul problemei, enunțul ei și pe urmă numele autorului. Soluțiunea trebuește redactată concis fără desvoltări inutile, luând exemplul soluțiunilor publicate în revistă. Jos se va scrie numele corespondentului (nu iscălitură), clasa și școala din care face parte.

Studenții Școalei Politechnice din Timișoara, au pus bazele unei societăți culturale pe lângă care s'au strâns toți studenții din anul al doilea, prim și pregătitor. Societatea ține șezători culturale Dumineca dimineața în localul Școlii Politechnice din două în două săptămâni.

Programul șezătorilor este compus din câte o conferință, muzică și declamații. Un frumos quartet compus din studenții *Săceanu S., Stoicovici V., Volitzer S., Klein R.*, execută bucăți clasice cu cel mai desăvârșit succes. Declamații diferite completează programul.

Conferințele au fost ținute de diferiți profesorii școalei cărora societatea le-a cerut concursul. Astfel au vorbit până acum

Dr. Ing. C. Cândeu. Desvoltarea industrială a României.

Ing. C. Teodorescu. Ce este, ce face un inginer.

Ing. V. I. Vlad. Construcțile în raport cu mișcarea culturală.

Frumoasa mișcare ce se manifestă astfel printre studenți este demnă de toată lauda. Și președintele societății d-l *I. Vlădescu* merită desigur atențiune pentru osteneala ce și-o dă de a întreține această frumoasă mișcare.

O altă societate a studenților care este mai veche, fiind întemeiată de anul trecut din inițiativa d-lui *Tr. Lalescu,* fost rector al Școalei Politechnice, este societatea de sport a studenților Școalei Politechnice. In cursul anului acesta societatea a organizat lecțiunile de scrimă în timpul iernei, iar odată cu venirea primăverei a aranjat echipele de football cașe vor începe antrenamentul.

Sub conducerea președintelui său Prof. Ing. *V I. Vlad*, membru al F. S. S. R., societatea a aranjat în cursul lunei Februarie o serată dansantă pentru strângerea fondurilor.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMISOARA.

ANUL II. 15 APRILIE 1922. NO. 2.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. O CLASA DE IDENTITATI ALGEBRICE.
2. PROBLEME REZOLVATE.
3. NOTE MATEMATICE.
4. PROBLEME PROPUSE.
5. INFORMATIUNI.

MISOARA
Institut de Arte Grafice «Cartea Românească»
1922

Avem plăcerea a face cunoscut corespondenților noștri că dela 1 Martie 1922, fac parte din comitetul Revistei Matematice și d-nii Dr. **A. Angelescu, G. Bratu, Gh. Dumitrescu** și **A. Petrescu** profesori la universitatea din Cluj.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **Ing. M. Vasiliu** sub-directorul Fabricei de Tutun, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL II. — No. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1922

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Inginer M. VASILIU, Fabrica de Tutun, Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

O CLASA DE IDENTITATI ALGEBRICE

de V. ALACI

Am arătat în No. 1 al acestei Reviste, cum pornind dela oricare *identitate trigonometrică* și transformând-o prin formulele lui *Euler*.

$$(1)\qquad \sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},\quad \cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$

unde $i=\sqrt{-1}$, obținem o *identitate algebrică*.

In prezentul articol ne propunem a supune transformărilor (1), câteva sume și câteva identități trigonometrice condiționate.

1. Considerăm însumarea trigonometrică [1]):

$$(2)\qquad \sum_{p=1}^{n}\sin pa\sin(p+1)a=\frac{n}{2}\cos a-\frac{\cos(n+2)a\sin na}{2\sin a}$$

In virtutea formulelor de transformare (1), ea devine:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{e^{ipa}-e^{-ipa}}{2i}\cdot\frac{e^{i(p+1)a}-e^{-i(p+1)a}}{2i}=\frac{n}{2}\cdot\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}+\frac{(e^{i(n+2)a}+e^{-i(n+2)a})(e^{ina}-e^{-ina})}{4(e^{ia}-e^{-ia})}$$

Notând $e^{ia}=x$ și simplificând obținem:

$$(3)\qquad \left(x-\frac{1}{x}\right)\sum_{p=1}^{n}\left(x^p-\frac{1}{x^p}\right)\left(x^{p+1}-\frac{1}{x^{p+1}}\right)=\left(x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}\right)\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)-n\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$$

1) Compléments de Trigonométrie, par F. G. M. pag 48, 49, 50.

Identitatea trigonometrică (2) s'a transformat astfel în identitatea algebrică (3), valabilă după o observațiune făcută în articolul din No. 1 al Revistei, pentru orice valoare reală sau imaginară a lui x.

2. Insumarea trigonometrică [1]),

$$(4)\qquad \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2^{p-1}}\operatorname{tg}2^{1-p}a=\frac{1}{2^{n-1}}\cot 2^{1-n}a-2\cot 2a$$

transformată prin formulele (1), devine:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2^{p-1}}\cdot\frac{e^{2^{1-p}ia}-e^{-2^{1-p}ia}}{i(e^{1-p\,ia}+e^{-2^{1-p}ia})}=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{i(e^{2^{1-n}ia}+e^{-2^{1-n}ia})}{e^{2^{1-n}ia}-e^{-2^{1-n}ia}}-2\frac{i(e^{2ia}+e^{-2ia})}{e^{2ia}-e^{-2ia}}$$

Simplificând și notând, $e^{ia}=x$, obținem:

$$(5)\qquad \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{\sqrt{x}^{2p-2}-1}{\sqrt{x}^{2p-2}+1}=\frac{x^4+1}{x^4-1}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{x}^{2n-2}+1}{\sqrt{x}^{2n-2}-1}$$

Identitatea trigonometrică (4) s'a transformat în identitatea algebrică remarcabilă (5), valabilă pentru orice valoare reală sau imaginară a lui x.

Observare. Identitatea (5) se menține și pentru $n=\infty$, trebuie însă a calcula limita scăzătorului din membrul al 2-lea, avem:

$$E=\lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{x}^{2n-2}+1}{\sqrt{x}^{2n-2}-1}=2\lim_{n=\infty}\frac{2^{-n}}{x^{\frac{1}{2n-1}}-1}$$

Ultimul factor fiind de forma $\frac{0}{0}$, aplicând teorema lui Hôpital, găsim

$$E=\frac{1}{2Lx}$$

Identitatea (5) se reduce astfel la următoarea serie însumată:

$$(6)\qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \cdot \frac{\sqrt[2^{p-2}]{x}-1}{\sqrt[2^{p-2}]{x}+1} = \frac{x^4+1}{x^4-1} - \frac{1}{2\mathrm{L}x}$$

Identitatea (6) se mai poate scrie:

$$(7)\qquad \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{2^p} \cdot \frac{\sqrt[2^{p-2}]{x}-1}{\sqrt[2^{p-2}]{x}+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{1}{2\mathrm{L}x}$$

Dacă facem acum $x = \sqrt{-1} = i$ și observăm că,

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$$

de unde,

$$\mathrm{L}i = i\frac{\pi}{2}$$

Atunci (7) devine:

$$(8)\qquad \frac{1}{\pi} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{i}{2^p} \cdot \frac{1-\sqrt[2^{p-2}]{i}}{1+\sqrt[2^{p-2}]{i}}$$

3. Insumarea trigonometrică[1]),

$$(9)\qquad \sum_{p=1}^{n} \sec pa \sec(p+1)a = \frac{\operatorname{tg}(n+1)a - \operatorname{tg} a}{\sin a}$$

transformată prin formulele (1), devine:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{2}{(e^{ipa}+e^{-ipa})(e^{-ip+1)a}+e^{-i(p+1)a})} = \frac{\dfrac{e^{i(n+1)a}-e^{-i(n+1)a}}{e^{i(n+1)a}+e^{-i(n+1)a}} - \dfrac{e^{ia}-e^{-ia}}{e^{ia}+e^{-ia}}}{e^{ia}-e^{-ia}}$$

Notând $e^{ia} = \sqrt{x}$ și simplificând găsim:

$$(10)\qquad \sum_{p=1}^{n} \frac{x^{p-1}}{(x^p+1)(x^{p+1}+1)} = \frac{x^n-1}{(x^{n+1}+1)(x^2-1)}$$

Identitatea trigonometrică (9) s'a transformat astfel în identitatea algebrică remarcabilă (10), valabilă pentru orice valoare reală sau imaginară a lui x.

4. Produsul trigonometric[1]),

$$(11)\qquad \prod_{p=1}^{n} \cos\frac{a}{2^p} = \frac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}$$

transformat prin formulele (1), devine:

$$\prod_{p=1}^{n} \frac{e^{\frac{ia}{2^p}}+e^{-\frac{ia}{2^p}}}{2} = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2^n\left(e^{\frac{ia}{2^n}}-e^{\frac{-ia}{2^n}}\right)}$$

Simplificând și notând $e^{ia} = x$, avem:

$$(12)\qquad \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{2^{p-1}}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{x^2-1}{2^{n-1}\sqrt{x-1}}$$

Identitatea trigonometrică (11) s'a transformat în identitatea algebrică (12), valabilă pentru orice valoare reală sau imaginară a lui x.

Vom transforma acum în identități algebrice, câteva identități trigonometrice condiționate.

5. E stabilit că dacă,

$$(13)\qquad a+b+c = \pi,$$

avem identitatea[2]):

$$(14)\qquad \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1$$

Transformând-o prin formulele (1), (14) devine:

$$\left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ic}+e^{-ic}}{2}\right)^2 + 2\,\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \cdot \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \cdot \frac{e^{ic}+e^{-ic}}{2} = 1.$$

Simplificând și notând,

$$(15)\qquad e^{ia} = x, \quad e^{ib} = y, \quad e^{ic} = z,$$

obținem identitatea algebrică

$$(16)\qquad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{y}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) = 4,$$

2) Culegere de Probleme de *I. Ionescu, G. Titeica A. G. Ioachimescu* și *V. Cristescu* pág. 394—395.

valabilă sub condiția,

(17) $xyz = e^{i(a+b+c)} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$

dedusă din (13) și (15).

Observare. Putem înlătura condiția (17), luând:

$$x = \frac{\alpha}{\beta},\ y = -\frac{\beta}{\gamma},\ z = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Identitatea (16) devine,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)=4.$$

Scăpând de numitori și înlocuind pe α^1, β^1, γ^1 prin α, β, γ ceeace este permis fiind o identitate, avem:

(18) $$\gamma(\alpha+\beta)^2+\alpha(\beta+\gamma)^2+\beta(\gamma+\alpha)^2-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)=4\alpha\beta\gamma.$$

Am stabilit astfel o identitate algebrică, în care α, β, γ nu sunt supuse la nici o condiție și pot avea orice valori reale sau imaginare.

6. Dacă,

(19) $$a+b+c=\pi,$$

avem stabilită identitatea[2]):

(20) $$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}=1$$

Transformând-o prin formulele (1), (20) devine:

$$\frac{e^{ia}-1}{i(e^{ia}+1)}\cdot\frac{e^{ib}-1}{i(e^{ib}+1)}+\frac{e^{ib}-1}{i(e^{ib}+1)}\cdot\frac{e^{ic}-1}{i(e^{ic}+1)}+\frac{e^{ic}-1}{i(e^{ic}+1)}\cdot\frac{e^{ia}-1}{i(e^{ia}+1)}=1.$$

Simplificând și notând,

(21) $$e^{ia}=x,\ e^{ib}=y,\ e^{ic}=z,$$

găsim identitatea algebrică,

(22) $$\frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}+\frac{(y-1)(z-1)}{(y+1)(z+1)}+\frac{(z-1)(x-1)}{(z+1)(x+1)}=-1,$$

valabilă sub condiția,

(23) $$xyz=-1$$

dedusă ca și condiția (17).

Observare. Putem înlătura condiția (23), luând:

$$x=-\frac{\alpha}{\beta},\ y=-\frac{\beta}{\gamma},\ z=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

Identitatea (22) devine;

(24) $$\frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\beta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}+\frac{(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\gamma+\alpha)(\beta+\alpha)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}=1$$

In această identitate algebrică, α, β, γ sunt independenți.

7. Dacă,

(25) $$a+b+c=\pi,$$

avem stabilită identitatea[2]):

(26) $$\operatorname{tg}2a+\operatorname{tg}2b+\operatorname{tg}2c=-\frac{\sin 4a+\sin 4b+\sin 4c}{1+\cos 4a+\cos 4b+\cos c}$$

Transformând-o prin formulele (1), (24) devine după mici simplificări:

$$\frac{e^{2ia}-e^{-2ia}}{e^{2ia}+e^{-2ia}}+\frac{e^{2ib}-e^{-2ib}}{e^{2ib}+e^{-2ib}}+\frac{e^{2ic}-e^{-2ic}}{e^{2ic}+e^{-2ic}}=-\frac{e^{4ia}-e^{-4ia}+e^{4ib}-e^{-4ib}+e^{4ic}-e^{-4ic}}{2+e^{4ia}+e^{-4ia}+e^{4ib}+e^{-4ib}+e^{4ic}+e^{-4ic}}$$

Notând,

(27) $$e^{4ia}=x,\ e^{4ib}=y,\ e^{4ic}=z$$

găsim identitatea algebrică:

(28) $$\frac{x-1}{x+1}+\frac{y-1}{y+1}+\frac{z-1}{z+1}=-\frac{x-\frac{1}{x}+y-\frac{1}{y}+z-\frac{1}{z}}{2+x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}},$$

valabilă sub condiția,

(29) $$xyz=e^{i(a+b+c)}=e^{4i\pi}=\cos 4\pi+i\sin 4\pi=1,$$

dedusă din (25) și (27).

Observare. Putem înlătura condiția (29), luând:

$$x=\frac{\alpha}{\beta},\ y=\frac{\beta}{\gamma},\ z=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Identitatea (28) devine după oarecare simplificări:

$$(30)\quad \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}+\frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}+\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\gamma}=\frac{\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta\gamma}$$

In această identitate algebrică, α, β, γ sunt independenți.

Exemplele tratate invederează suficient formarea unei clase de *identități algebrice*, obținute printr'un procedeu de transformare uniformă din *identitățile trigonometrice.*

PROBLEME REZOLVATE

30. — *Dacă ecuația* $ax^2+bx+c=0$ *are rădăcini reale, să se studieze natura rădăcinilor ecuațiilor formate prin schimbarea coeficienților în toate modurile posibile.*

Lt. I. Lintes

Prin permutarea în toate modurile posibile a coeficienților a, b, c obținem ecuațiile:

$$1)\ \begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ cx^2+bx+a=0 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} ax^2+cx+b=0 \\ bx^2+cx+a=0 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} cx^2+ax+b=0 \\ bx^2+ax+c=0 \end{cases}$$

cari au două câte două realizanții egali, deci vor avea în același timp rădăcini reale sau imaginare.

Ecuațiile 1) având realizantul b^2-4ac, dat prin enunț pozitiv, urmează că vor avea totdeauna rădăcini reale.

Ecuațiile 2) au realizantul c^2-4ab, deci vor avea rădăcinile reale când:

$$c^2-4ab\geqq 0.$$

Știm însă că mai avem $b^2-4ac\geqq 0$, dar pentru ușurință să admitem:

$$b^2=4ac$$

de unde scoțând pe $4a$, deducem că:

$$c^2\geqq\frac{b^2}{c}.b \quad \text{sau} \quad c^3\geqq b^3$$

deci: $$b\leqq c.$$

Dar dacă $b>0$ și $c\geqq b$, urmează că $\frac{b}{c}<1$, deci $\frac{b^2}{c}<b$ și atunci:

$$4a=\frac{b}{c}<b$$

prin urmare:

$$4a<b\leqq c$$

sunt condițiile ca ecuațiile 2) să aibă rădăcini reale.

In cazul când $b<0$ și $c<0$, deci $\frac{b}{c}>1$ se ajunge la aceleași concluzii ca mai sus.

Rădăcinele ecuațiilor 2) vor fi imaginare când:

$$c^2<4ab$$

de unde în analogie cu celălalt caz se deduc condițiile: $$4a>b>c.$$

Insă $4a>b$, dar putem avea $a<b$, asemenea față de c, deci aceste condițiuni se pot desface în:

$$\begin{cases} a>b>c \\ b>a>c \\ b>c>a \end{cases}$$

Ecuațiile 3) au realizantul a^2-4bc. deci vor avea rădăcinele reale când

$$a^2\geqq 4bc$$

ținând seama că:

$$b^2\geqq 4ac.$$

Analog ca pentru ecuaţiile 2) se găseşte condiţiunile:

$$a \geqq b > 4c$$

pentruca rădăcinele să fie reale şi

$$4c > b > a$$

pentruca rădăcinele să fie imaginare sau:

$$\begin{cases} c > b > a \\ b > c > a \\ b > a > c \end{cases}$$

In rezumat voi forma tabloul:

	1	2	3	Observaţiuni
$a > b > c$	Totdeauna rădăcini reale. (Date prin enunţ)	Im.	*Reale*	Aici ar fi trebuit să scriem: $a > b > 4c$ şi $c > b > 4a$, însă aceasta este impusă de $b^2 \geq 4ac$.
$c > b > c$		*Reale*	Im.	
$b > a > c$		Im.	Im.	
$b > c > a$		Im.	Im.	
$a > c > b$		Im.	Im.	Din cauza condiţiunei $b^2 \geq 4ac$, în aceste cazuri coeficienţii vor fi toţi negativi.
$c > a > b$		Im.	Im.	

Lt I. Lintes

Notă. Problema a fost parţial rezolvată de d-nii *F. Negreţu* şi *I. B. Florescu*, celelalte soluţiuni cuprinzând concluzii fără discuţiuni sau discuţiuni fără concluzii.

S'au mai făcut câteva observaţiuni relative la sumele şi produsul rădăcinilor celor şease ecuaţiuni obţinute prin permutări, observaţiunile sunt prea evidente şi nu fac obiectul unei chestiuni de un interes deosebit.

Lt. I. L.

59. — *Se consideră o secantă variabilă* AB *trecând prin unul din punctele comune a două cercuri date* O *şi* O'. *Perpendiculara din* B *pe* AO *întâlneşte cercul* O' *în* C.

Să se demonstreze că coarda BC *este constantă.*

Corneliu Săndulescu

Fie I unul din punctele comune celor două cercuri, prin care trece secanta mobilă AB, fie E punctul unde AO taie a doua oară cercul O şi D intersecţia dreptelor AO şi BC. Unim I cu E şi C. Din triunghiurile ADB şi AIE ambele dreptunghice, primul în D iar al doilea în I se deduce că

$$\sphericalangle AEI = \sphericalangle CBI$$

ca având acelaşi complement şi anume $\sphericalangle BAD$.

Fie IT şi IT' tangentele duse în punctul I respectiv la cercurile O şi O'. Se vede atunci că

$$\sphericalangle AEI = \sphericalangle AIT$$

$$\sphericalangle BCI = \sphericalangle BIT'$$

ca având aceiaşi măsură şi anume, jumătatea arcelor AI şi BI din cercurile O şi O'. Prin adunare deducem

$$\sphericalangle AEI + \sphericalangle BCI = \sphericalangle AIT + \sphericalangle BIT =$$

$180^0 - \sphericalangle TIT' =$ constant căci TIT' este tocmai unghiul sub care se taie cele două cercuri.

Ţinând seamă că $\sphericalangle AEI = \sphericalangle CBI$ avem

$$\sphericalangle CBI + \sphericalangle BCI = \text{constant.}$$

Adică în triunghiul BCI suma a două unghiuri este constantă, rezultă atunci că şi al treilea unghiu adică $\sphericalangle CIB$ va fi şi el constant, urmează de aci că şi arcul BC şi deci coarda BC va fi constantă, ori care are fi poziţia secantei AB.

Q. E. D.

I Observaţie. Coarda BC fiind de lungime constantă, distanţa ei la centrul cercului O' va fi şi ea constantă, urmează că coarda BC când secanta AB se roteşte în jurul punctului I va rămâne tangenta unui cerc O'' concentric cu cercul O'.

II Observaţie. Punctul D se observă că poate fi considerat ca fiind proecţia punctului fix O pe tangentele BC duse la cercul O' deci locul geometric al punctului D este curba cunoscută sub numele de melcul lui Pascal.

III Observaţie. Unii din corespondenţii noştri au demonstrat că $\sphericalangle BIC$ este constant, demonstrând mai întâi că $\sphericalangle EIC$ în patrulaterul EICD este constant şi atunci $\sphericalangle BIC$ apare ca suplimentul a două unghiuri constante.

Soluţiuni bune au dat d-nii: *Mircea Popescu, Silion G. Ion, Stoenescu Alexandru, Şerbănescu M. I., I. N. Georgescu-Val şi Popescu N. Ştefan.*

Celelalte soluţiuni primite sunt greşite, unele din ele nu aveau nici măcar enunţul exact reprodus.

71. — *Se consideră un număr de patru cifre, căruia i se adună suma cifrelor sale, obținând astfel un al doilea număr. Cu acesta se procedează în același mod până la al patrulea număr, care astfel obținut este 1921. Care este numărul dela care s'a pornit ?*

N. I. Ciorănescu

Vom folosi metoda remarcabilă din articolul d-lui Inginer I. Ionescu, recomandând-o atenţiunei cititorilor noştri. (Revista Matematică No. 8).

Fie *mszu* numărul căruia adunându-i suma cifrelor, să ne dea 1921. Cum suma cifrelor nu poate trece de 36, numărul nostru va fi de forma 18*zu* sau 19*zu*.

Conform enunţului trebuie să avem :

18*zu*		19*zu*
u		*u*
z		*z*
8	sau	9
1		1
1921		1921

Suprimăm din sumă părţile numerice cunoscute şi avem :

zu		*zu*
u		*u*
z	sau	*z*
112		11

In primul caz, $z+2u$ trebuind să se termine cu 2, z n'ar putea fi decât cel mult 8, iar *zu* cel mult 89. Dar însumând la 89 suma cifrelor, sau oricărui număr mai mic suma cifrelor lui, nu putem ajunge 112. Primul caz nu ne poate procura nici un număr.

Al 2-lea caz ne procură uşor $z=1$, $u=0$. Aşa dar 1910 este numărul căruia adunându-i suma cifrelor ne dă 1921, număr care este aflat şi în articolul citat.

Procedând la fel cu 1910, găsim că numerile 1891 şi 1900 împlinesc condiţia că adunate cu suma cifrelor ne dă 1910. Intrebuinţând aceiaşi metodă încă odată, găsim că 1868 şi 1877 sunt soluţiile cerute.

Au dat ambele soluţiuni utilizând articolul citat D-nii: *Amărescu A. G., Antoniu S. Ion, Asnas S., Atanasiu Dumitru, Bărănescu L., Cocorandu M., Emilian Iliescu, Georgescu I. C., Gâtan M., Glasberg R., Marinescu V. S., Măru Dumitru, Nancă N., Negretzu F., Popescu St., Silion I., Stefaniu V.*

Au dat ambele soluţiuni întrebuinţând o metodă mai lungă, D-nii: *Bonea I., Cosereanu I., Dinulescu N., Kanner A., Serbănescu I., Stamatescu V.* şi *Tauber A.*

Au dat o singură soluţie D-nii *Dumitrescu M, Echidean E., Georgescu Fl., Goilav Cr., Ionescu Carol, Lemeş M., Miclescu A., Popovici T., Scodreanu A., Stoenescu I.* şi *Teodoru N.* Menţionăm încă pe D-nii: *Popa V.* şi *Steinbach N.*, care au aplicat odată în plus metoda de mai sus, găsind soluţia 1861.

76. — *Să se rezolve ecuaţiunea :*

$$\frac{\dfrac{1}{ax+b}+\dfrac{1}{cx+d}}{1+\dfrac{1}{(ax+b)(cx+d)}}=1$$

M. Sarian

Soluţiune dată de d-nii *Mircea Bobârnac, Cristea P. Goilav, A. Th. Nicolau* şi *Petrescu Cernea.*

Ecuaţiunea dată o putem scrie succesiv :

$$(cx+d)+(ax+b)=(ax+b)(cx+d)+1$$

$$(cx+d)(1-ax-b)=1-ax-b$$

$$(1-ax-b)(cx+d-1)=0$$

de unde

$$1-ax-b=0$$

$$cx+d-1=0$$

care ne dă $x_1=\dfrac{1-b}{a}$ şi $x_2=\dfrac{1-d}{c}$, valori care constituesc cele două soluţiuni a ecuaţiunei date.

Mulţi din colaboratorii noştri au rezolvit problema, pe calea mult mai lungă, a unei ecuaţii complicate de gradul al doilea, cari prin rezolvire şi numeroase calcule, au ajuns la soluţiunile simple de mai sus, fără să observe scoaterea în factor comun.

Prin câte una din aceste două metode, au ajuns la acelaş resultat şi D-nii: *Eugen Crainicescu, Muş Orest, Beşliu Gh. Constantin, Elemer Novotny, Traian Răbăgia, Popescu I. Gheorghe, Corneliu Săndulescu, Robert Glasberg, George Gaef, Marinescu V. Ioan, Dragomirescu-Buzne Eduard, Nicolae Miulescu, Ioan M. Ioniţă, I. N. Georgescu-Val, Andrei Micleşcu, Marinescu V. Ioan.*

Din clasa VIII liceală: *Mircea Gh. Săvescu, Em. V. Soceanu, Octav Uhlman, Const. Iorgulescu, Gh. D. Popescu, V. Antistescu, Sofronie Stanculescu, Iosif Rafiroiu, N. Matei, Const. Chiorescu, Nicolae Gh. Alex. Tuducescu A. Nicolae, Solomon Asnaş.* Din clasa VII liceală: *I. C. Georgescu,*

Nicu A. Stănescu, Nicu D. Muchicescu M. Gâtan, Dlii C. Schileru, Doru Raoul M. Demetrescu, Modrogan Ion, Virgil Vasilescu, T. Georgescu, Nicolescu Isaia, Pincu Katz, Herman Novac, Pavlu Eduard, Echidarie Froeman, Nicolae Petrescu, V. Dan, Ion. I. Iliescu, I. D. Mateescu-Buzău, Dinulescu N. Nicolae, Măru Dumitru, Mehlmann Theodor, Ernest Oprișan, N. Simonescu, Nicuță Theodoru, Ștefăniu Vaisle, Const. E. Georgescu Eugen Ionică, Mircea Cocorandu, Aurel P. Sufletel, I. Samovici, Puiu Bacalu, Mihail M. Gogălniceanu, Nicu Părăianu. Din clasa VI liceală: *Popescu N. Stefan, Florea Negreț, Bogdan P. Martinian, Ciolacu St. Miron, Amărăscu O. Gavril, Tenea N. Ion, Ioan S. Rețcanu, Ionescu I. Longin, Caracaș I. Ștefan, Ionescu Ilie, Dobrescu M. Filip, Ristea N. Marin, Arcadian P. Nicolae, Prundeanu Ilie, I. Musta, M. I. Șerbănescu, Virgil Ghițescu, Bușilă A. Adrian, Giotta Vincențiu, Const. Berdan, A. I. Stoenescu, Georgescu Er. Florian, Valeriu I. Stamatescu, Otilia Busuioc, G. I. Silion, Samoilă Dumitru, Popa S. Teodor, Emil Ștefănescu, Ioan Lungu Ion. S. Antoniu, Emilian D. Iliescu, Tiberiu Popovici, Lăzărescu Fl. Ștefan, Ioan Cândea și Brătescu H. Mihail, Tauber Alex.*

Din clasa V liceală: *Atanasiu I. Dumitru, S. Segall, Ionescu I. Carol, Crețu I. Adrian, Părăianu C. Emanoil, Maximilian Grünfeld.*

Precum și D-nii: Sorin Gorivei, Gh. Melinte, Sorin Nicolescu, I. Coșereanu, Alexandru Mituiescu, I. Cipică, Scodreanu Alexandru, Pu'u Iuster, I. St. Theodorescu, Filip C. V.

D-l *Dili C. Schileru* observă că analog cu ecuația dată, se poate rezolvi și ecuațiunea mai generală:

$$\frac{\dfrac{1}{ax^n+b}+\dfrac{1}{cx^n+d}}{1+\dfrac{1}{(ux^n+b)(cx^n+d)}}=1$$

care tratată la fel, ne va da

$$x_1=\sqrt[n]{\frac{1-b}{a}},\quad x_2=\sqrt[n]{\frac{1-d}{c}}.$$

Mai general însă, se poate spune, că x poate fi orice funcție $f(x)$ astfel că ecuațiile la rândul lor

$$f_1(x)=\frac{1-b}{a},\quad f_2(x)=\frac{1-d}{c}$$

se permite a scoate pe x printr'o ecuație oarecare rezolvabilă.

D-l *Caracaș I. Ștefan* observă că dacă $ax+b=cx+d$ avem soluțiile

$$x_1=\frac{d-b}{a-c},\quad x_2=\frac{1-b}{a}$$

și dacă se schimbă între ele $ax+b$, $cx+d$, soluțiile nu se schimbă, cum și era de așteptat.

M. V.

78. — *Ce triunghiu face minimă expresiunea:*

$$E=\frac{2r_a-h_c}{2r_a-h_b}+\frac{2r_b-h_a}{2r_b-h_c}+\frac{2r_c-h_b}{2r_c-h_a}$$

r_a, r_b, r_c, h_a, h_b, h_c, fiind elementele obicinuite ale unui triunghiu oarecare.

Ioan B. Florescu

Inlocuind în expresiunea dată pe $r_a=\dfrac{s}{p-a}\ldots.$ și $h_a=\dfrac{2s}{a}\ldots.$ avem:

$$E=\frac{(c+a-p)b}{(b+a-p)c}+\frac{(a+b-p)c}{(c+b-p)a}+\frac{(b+c-p)a}{(a+c-p)b}$$

care va fi minimă, atunci când cei trei termeni ce o compun vor fi egali, dacă produsul lor este constant.

In adevăr, efectuând acest produs căpătăm:

$$\frac{(c+a-p)(a+b-p)(b+c-p)abc}{(a+c-p)(b+a-p)(c+b-p)abc}=1$$

Putem egala cei trei termeni, fie așa cum sunt dați sau fie cum au devenit transformați.

In cazul întâi avem:

$$\frac{2r_a-h_c}{2r_a-h_b}=\frac{2r_b-h_a}{2r_b-h_c}=\frac{2r_c-h_b}{2r_c-h_a}=$$
$$=\frac{2(r_a+r_b+r_c)-(h_a+h_b+h_c)}{2(r_a+r_b+r_c)-(h_a+h_b+h_c)}=1$$

de unde $2r_a-h_c=2r_a-h_b$ care ne dă $h_c=h_b$ și $2r_b-h_a=2r_b-h_c$ care ne dă h_a-h_c. Deci cele trei înălțimi fiind egale, triunghiul va fi echilateral.

Egalând termenii cum au devenit transformați și observând ca $(c+a-p)b=(p-b)b\ldots..$ avem:

$$\frac{(p-b)b}{(p-c)c}=\frac{(p-c)c}{(p-a)a}=\frac{(p-a)a}{(p-b)b}=$$
$$=\frac{p(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)}{p(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)}=1$$

de unde $\frac{p-b}{p-c}=\frac{c}{b}=\frac{p-(b+c)}{p-(c+b)}=1$ sau $c=b$

și $\frac{p-c}{p-a}=\frac{a}{c}=\frac{p-(c+a)}{p-(a+c)}=1$ ce ne dă $a=c$

ceiace învederează în adevăr că triunghiul este echilateral, iar minimul lui E va fi $E=3$.

Au rezolvat astfel problema d-nii: *Cristea Goilav, Ioan M. Ioniță, I. N. Georgescu-Val, Em. V. Soceanu, Gh. D. Popescu, Const. Iorgulescu, Mircea Gh. Săvescu, Octav Ulmann, L. Focșănianu, Dili C. Schileru, N. Dan, Vasilescu C. Virgil, Gogălniceanu M. Mihail, Ion I. Iliescu, Const. E. Georgescu, Alexandru Tauber, M. I. Șerbănescu, Georgescu Er. Florian, Bușilă Adrian, N. Georgescu-Roegen, Valeriu I. Stamatescu, Constantin Berdan, Giotta Vincențiu, E. Iliescu, Puiu Juster, I. Coșereanu și Nic. Pârâianu.*

Asemenea au procedat d-nii: *Alexandru Tauber, Scodreanu Alexandru, Popescu N. Ștefan, Bușilă Adrian, Georgescu I. C. și M. Gâtan.*

Unii din colaboratorii noștri, au înlocuit totul în funcție de raze, găsind în același mod $r_a=r_b=r_c$.

(1) $$\frac{2r_c-h_a}{2r_b-h_a}+\frac{2r_a-h_b}{2r_c-h_b}+\frac{2r_b-h_c}{2r_a-h_c}$$

(2) $$\frac{2r_b+h_b}{2r_c+h_c}+\frac{2r_a+h_a}{2r_b+h_b}+\frac{2r_c+h_c}{2r_a+h_a}$$

(3) $$\frac{h_a\pm 2r}{h_b\pm 2r}+\frac{h_b\pm 2r}{h_c\pm 2r}+\frac{h_c\pm 2r}{h_a\pm 2r}$$

(4) $$\frac{r_a\pm r}{r_b\pm r}+\frac{r_b\pm r}{r_c\pm r}+\frac{r_c\pm r}{r_a\pm r}$$

cum se poate arăta pe calea absolut analoagă indicată.

Mai observ apoi, că o aceiași demonstrație, duce la concluzia, că triunghiurile isoscele, fac minime expresiunile următoare:

(5) $$\frac{2r_b+h_b}{2r_c+h_c}+\frac{2r_c-h_a}{2r_b-h_a}+\frac{h_c-2r}{h_b-2r}$$

(6) $$\frac{2r_a+h_a}{2r_b+h_b}+\frac{2r_b-h_c}{2r_a-h_c}+\frac{h_b-2r}{h_a-2r}$$

(7) $$\frac{2r_c+h_c}{2r_a+h_a}+\frac{2r_a-h_b}{2r_c-h_b}+\frac{h_a-2r}{h_c-2r}$$

M. V.

86. — *Să se rezolve ecuația:*

$$x^4-(a^2+9c^2)x^3-(4b^2-9a^2c^2)x^2+4b^2(a^2+9c^2)x-36a^2b^2c^2=0.$$

Gh. Rădulescu.

Soluție dată de d-nii:

Florea Negrețu, Alex. Tauber și *Șerbănescu M. I.* Desvoltând și grupând termenii cari conțin litera a^2 de o parte, iar între ceilalți dând factor pe x obținem ecuația:

$$x(x^3-9c^2x^2-4b^2x+36b^2c^2)-$$
$$-a^2(x^3-9c^2x^2-4b^2x+36b^2c^2)=0$$
$$\therefore (x-a^2)(x^3-9c^2x^2-4b^2x+36b^2c^2)=0$$
$$\therefore (x-a^2)[x(x^2-4b^2)-9c^2(x^2-4b^2)]=0$$
$$\therefore (x-a^2)(x^2-4b^2)(x-9c^2)=0$$
$$\therefore (x-a^2)(x+2b)(x-2b)(x-9c^2)=0$$

Rădăcinele sunt deci:

$$x_1=a^2 \quad x_2=-2b \quad x_3=2b \quad x_4=9c^2.$$

Au rezolvat problema d-nii *Amărăscu Gavril, Antoniu Ion, Bușilă Adrian, Buznea Eduard, Cocorandu M., Constantinescu Ion, Ciolacu St. Miron, Crăinicescu Eugen, Dobrescu M. Filip, Dordea A. Traian, I. N. Georgescu-Val, Goilav Cristea, Georgescu Florian, Georgescu E. Constantin, Ghițescu Virgiliu, Ionescu Ilie, Iliescu I. Ion, Kanner Adalbert, Lăzărescu Gr. Ionel, Mus Oreste, Mărculescu Gh. B., Miclescu Andrei, Macri Socrate, Oprișanu Ernest, Pamula Alex., Popescu M. Ion, Popescu St. Mircea, Popovici Th. Ioan, Prundeanu Ilie, Pârâianu Nicolae, Răbăgia Traian, Ristea N. Marin, Săvescu M. Gh., Stamatescu A. I., Schileru Dili, Tenea N. Ioan, Teodorescu I. St., Ursescu D. Gh., Ulman Octav, Samovici I.* și *Scodreanu Alex.*

Au rezolvit problema grupând termenii în modul următor:

$$x^2(x^2-4b^2)-a^2x(x^2-4b^2)-9c^2x(x^2-4b^2)+$$
$$9a^2c^2(x^2-4b^2)=(x^2-4b^2)(x^2-a^2x-9c^2x+9a^2c^2)=$$
$$(x-2b)(x+2b)[x(x-a^2)-9c^2(x-a^2)]=$$
$$(x-2b)(x+2b)(x-a^2)(x-9c^2)=0.$$

Expresie care duce la același rezultat.

D-nii: *Berdan Constantin, Cazanchi Petre, Freifeld Iosif, Giota Vincențiu, Melinte Gh., Martini-*

an Bogdan, Nicolau M. Iulian, Negulescu D., Popovci Tiberiu, Popa Teodor, Sbierea Ionel, Ştefaniu Vasile, Theodoru Nicu St., au rezolvat ecuaţia descompunând-o în două ecuaţiuni de gradul II-lea.

$$(x^2 - 4b^2)\,[x^2 - x\,(a^2 + 9c^2) + 9a^2c^2] = 0.$$

rezolvind în urmă pe fiecare în parte.

D-l *Beşliu G. Const.* a rezolvat ecuaţia căutând divizorii termenului constant.

Observaţie. Ecuaţia dată mai putea fi descompusă în factori, dacă se grupau de oparte termenii ce conţin pe $4b^2$ sau pe $9c^2$ iar între ceilalţi se dă factor comun x.

79. — *Un lanţ de lungimea a alunecă pe cele două laturi ale unui unghiu* O, *capătul* A *fiind pe* Ox *şi capătul* B *pe* Oy. *Fie* A_2OB_1, A_2OB_2 *două poziţiuni oarecare ale lanţului şi* M *intersecţia dreptelor* A_1B_1, A_2B_2. *Insemnând cu m proecţia lui* M *pe* Ox, *paralel cu* Oy, *să se arate că avem*

$$Om.a = OA_1 . OA_2.$$

P. Sergescu

Soluţii date de d-nii: S. Asnaş, I. Cişereanu, C. Chiorescu, Cr. Goilav, I. Freifeld, C. Iorgulescu, Al. Niculescu, M. Popescu, V. Stamatescu, M. Săvescu, E. Socianu, Al. Stoenescu, O. Ulman.

Soluţie geometrică. Din asemănarea triunghiurilor A_1OB, A_1mM; A_2OB_2, A_2mM, rezultă

$$\frac{OA_1}{A_1m} = \frac{OB_1}{Mm}, \quad \frac{OA_2}{A_2m} = \frac{OB_2}{Mm};$$

de unde, prin împărţire,

$$OA_2 . A_2m\, OB_2 = OA_2 . OB_1 . A_1m,$$

$$\text{Dar } OB_1 = a - OA_1,\ OB_2 = a - OA_2,$$

$$A_2m = OA_2 - Om,\ A_1m = OA_1 = Om;\ \text{deci}$$

$$OA_1\,(OA_2 - Om)\,(a - OA_2) = OA_2\,(a - OA_1)\,(OA_1 - Om),$$

$$-OA_1.Om.a - OA_1.\overline{OA_2}^2 = -OA_2.Om.a - OA_2.\overline{OA_1}^2$$

$$(OA_1 - OA_2)\,(Om.a - OA_1.OA_2) = 0.$$

Inlăturând cazul $OA_1 = OA_2$, rămâne relaţia propusă $OA_1 . OA_2 = Om . a$.

Soluţie analitică. Insemnând cu $A_1(\alpha, 0)$, $A_2(\beta, 0)$, atunci coordonatele punctelor B_1 şi B_2 sunt $(a-\alpha)$, $(a-\beta)$. Ecuaţiile dreptelor A_1B_1, A_2B_2 fiind

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{a-\alpha} = 1, \quad \frac{x}{\beta} + \frac{y}{a-\beta} = 1,$$

absisa punctului lor de intersecţie M este $\frac{\alpha\beta}{a}$;

urmează deci $\frac{OA_1 . OA_2}{a} = Om.$

NOTE MATEMATICE

Asupra problemei 18. In afară de calea urmată pentru a găsi soluţiunea problemei No. 18, îmi propun a da mai jos alte trei căi.

I. Din examinarea à priori a expresiunii date care este simetrică şi de gr. II în raport cu cele patru litere şi din faptul că se cere a fi descompusă în produs de patru factori se deduce că factorii vor fi binoame.

Scriind expresiunea sub forma

$$E = (ab - cd)^2 - (ab + cd)\,(a + b)\,(c + d) + ab\,(c^2 + d^2) + cd\,(a^2 + b^2)$$

se vede că a şi cu b şi c şi cu d sunt de acelaş semn deci $ab + cd > 0$.

Rămâne ca $(a + b)$ şi $(c + d)$ să fie de semne contrarii deci alegerea semnelor în binoame este uşoară şi se obţine descompunerea

$$(a - c)\,(a - d)\,(b - c)\,(b - d).$$

II. Fie $A = ab - cd$ $\therefore$ $B = a + b - c - d$ şi $C = abc + abd - acd - bdc$. Avem $E = A^2 - BC$ care pentru $a = c$; $a = d$; $b = c$; $b = d$ devine zero deci $E = K\,(a-c)\,(a-d)\,(b-c)\,(b-d)$ iar $K = 1$.

III. Expresiunea dată se poate socoti ca $f(a)$; $f(b)$; $f(c)$; $f(d)$. Dacă fac pe $a = b$ atunci $f(a) = (b - c)\,(b - d)$ care se anulează pentru $b = c$, $b = d$.

Dacă $a = c$, $\underset{a=c}{f(a)} = 0$ dacă $a = d$, $\underset{a=d}{f(a)} = 0$

aşa că se obţine descompunerea cerută.

IV. Expresiunea dată este un polinom care se poate scrie sub forma $E = A_0 a^2 + A_1 a + A_2$ ordonat după puterile lui A.

Identificând se are

$$A_0 = b^2 - b(c+d) + cd = (b-c)(b-d)$$

$$A_1 = -2bcd + bcd - (b-c)(bc+bd-cd) = -(c+d)(b-c)(b-d)$$

$$A_2 = c^2d^2 + bcd(b-c-d) = cd[b^2 - b(c+d) + cd] = cd(b-c)(b-d)$$

Deci

$$E = a^2(b-c)(b-d) - a(c+d)(b-c)(b-d) + cd(b-c)(b-d) = (a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$$

Nu este greu de văzut că prin analogie se pot construi încă șeapte expresiuni

$$(ab-cd)^2 + (a-b-c+d)[ab(c-d) - cd(a-b)]$$
$$(ab-cd)^2 - (a-b+c-d)[ab(c-d) + cd(a-b)]$$
$$(ab-cd)^2 + (a+b+c+d)[ab(c+d) + cd(a+b)]$$
$$(ab+cd)^2 - (a+b-c+d)[ab(c-d) + cd(a+b)]$$
$$(ab+cd)^2 + (a-b-c-d)[ab(c+d) + cd(a-b)]$$
$$(ab+cd)^2 - (a-b+c+d)[ab(c+d) - cd(a-b)]$$
$$(ab+cd)^2 + (a+b+c-d)[ab(c-d) - cd(a+b)]$$

P. Corotenco
profesor, Bălți

Asupra unui determinant. In „Leçons d'Algèbre supérieure" par G. Salmon la pag. 21 se află propusă desvoltarea determinantului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^2\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos^2\alpha & \cos^3\alpha \\ \sin^3\beta & \sin^2\beta\cos\beta & \sin\beta\cos^2\beta & \cos^3\beta \\ \sin^3\gamma & \sin^2\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\cos^2\gamma & \cos^3\gamma \\ \sin^3\delta & \sin^2\delta\cos\delta & \sin\delta\cos^2\delta & \cos^3\delta \end{vmatrix}$$

Rezultatul dezvoltării este:

$$\Delta = \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)\sin(\gamma-\delta).$$

Simetria rezultatului acestei dezvoltări sugerează ideea generalizării determinantului de mai sus, ceiace ne vom propune a face în prima parte a acestei note.

Fie determinantul de ordinul $(m+1)$:

$$\Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} \sin^m\alpha_1 & \sin^{m-1}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \cos^m\alpha_1 \\ \sin^m\alpha_2 & \sin^{m-1}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \cos^m\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^m\alpha_{m+1} & \sin^{m-1}\alpha_{m+1}\cos\alpha_{m+1} & \dots & \cos^m\alpha_{m+1} \end{vmatrix}$$

Dând ca factor comun, în linia I-a pe $\sin^m\alpha_1$, în linia II-a pe $\sin^m\alpha_2$, etc., obținem:

$$\Delta_{m+1} = D_{m+1}\sin^m\alpha_1\sin^m\alpha_2\sin^m\alpha_3\dots\sin^m\alpha_{m+1}$$

unde:

$$D_{m+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cot\alpha_1 & \cot^2\alpha_1 & \dots & \cot^m\alpha_1 \\ 1 & \cot\alpha_2 & \cot^2\alpha_2 & \dots & \cot^m\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cot\alpha_{m+1} & \cot^2\alpha_{m+1} & \dots & \cot^m\alpha_{m+1} \end{vmatrix}$$

Determinantul D_{m+1} este tocmai un determinant al lui *Vandermonde* a cărui dezvoltare o cunoaștem și deci putem scrie:

$$\Delta_{m+1} = \sin^m\alpha_1\sin^m\alpha_2\dots,.\sin^m\alpha_{m+1}$$
$$(\cot\alpha_2 - \cot\alpha_1)(\cot\alpha_3 - \cot\alpha_1)(\cot\alpha_4 - \cot\alpha_1)\dots.$$
$$(\cot\alpha_3 - \cot\alpha_2)(\cot\alpha_4 - \cot\alpha_2)\dots.$$
$$(\cot\alpha_4 - \cot\alpha_3)\dots.$$

Transformând diferențele dintre paranteze în produse, cu ajutorul formulei:

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin a\sin b}{\sin(b-a)}$$

obținem după simplificare:

$$\Delta_{m+1} = \sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\dots.$$
$$\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_4)\dots.$$
$$\sin(\alpha_3-\alpha_4)\dots.$$

o dezvoltare analoagă dezvoltării determinantului lui *Vandermonde*.

Rezultatul obținut îl putem extinde, considerând determinantul mai general:

$$A_{m+1} = \begin{vmatrix} a_1^m, & a_1^{m-1} b_1, & a_1^{m-2} b_1^2, \ldots . & b_1^m \\ a_2^m, & a_2^{m-1} b_2, & a_2^{m-2} b_2^2, \ldots . & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+1}^m, & a_{m+1}^{m-1} b_{m+1}, & a_{m+1}^{m-2} b_{m+1}^2, \ldots . & b_{m+1}^m \end{vmatrix}$$

pe care dezvoltându-l urmând exact acelaș mers ca la primul determinant obținem:

$$A_{m+1} = a_1^m a_2^m a_3^m \ldots . a_{m+1}^m \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_1}{a_1}\right) \ldots . \left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_2}{a_2}\right)\left(\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_2}{a_2}\right) \ldots . \left(\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_3}{a_3}\right) \ldots .$$

Efectuând parantezele și simplificând, obținem dezvoltarea foarte interesantă:

$$A_{m+1} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \times \ldots . \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \times \ldots . \times \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \times \ldots .$$

Miron Niculescu

Asupra problemei 72. O soluțiune mai simplă la care se pretează această problemă e următoarea:

Insemnând $x - 1 = X$ adică $x = X + 1$, problema se reduce la a arăta că polinomul

$$X^{5m+2} + X^{5m+1} + X^4 + X^3 + 1$$

se divide cu

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

Pentru aceasta observăm că înmulțind ambele polinoame cu $X - 1$, trebue demonstrat că

$$(X^{5m+2} + X^{5m+1} + X^4 + X^3 + 1)(X - 1)$$

se divide cu $X^5 - 1$, ceiace este evident căci înlocuind $X^5 = 1$ se obține restul zero.

Câtul calculat după regula obișnuită, este acel dat în No. 1, vol. II al RMT.

Ion I. Iliescu
cl. VII liceul Galați

Asupra teoremei lui Wilson. Vreau să dau aci o demonstrație a teoremei lui Wilson bazându-mă pe tema acestei teoreme, care se enunță astfel p fiind un număr prim, expresia

$$(p - 2)! - 1 = Mp$$

Notăm cu E expresia

$$E = (p - 1)! + 1$$

adunându-le avem

$$E + Mp = (p - 2)! + (p - 2)!(p - 1) = p(p - 2)!$$

primul membru este deci divizibil cu p; termenul al II fiind divizibil cu p trebue ca și termenul întâi adică E să se dividă cu p.

Emil Ștefănescu
cl. VIII R. Sp. Haret

PROBLEME PROPUSE

111. — Să se găsească forma numerilor care sunt în același timp și cuburi și patrate perfecte.

E. Iliescu

112. — Să se arate că expresiunea:

$$E = 2^n + 3^n + 4^n + 6^n$$

se divide cu 5 când n este un număr întreg și nedivizibil cu 4.

T. Popovici

113. — In biblioteca Sorbonei se găsesc 20 de mese de lectură, dreptunghiulare, cu locurile pe fețele cele lungi ale dreptunghiului. Locurile sunt două câte două față în față și sunt numerotate. La masa a treia, două locuri față în față au numerele 27 și 34. Se cere să se afle pe cale aritmetică, câți studenți pot lucra în bibliotecă în același timp, știind că ultimele 12 mese au câte două locuri mai mult de cât cele dintâi, care sunt egale între ele.

P. Sergescu

114—Se consideră semicercul descris pe diametrul AB ca fix și o coardă AC mobilă trecând necontenit prin punctul A. Să se afle locul geometric a punctului M, situat pe coarda BC astfel ca $BC.AM = K =$ costant.

M. Vasiliu

115. — Să se descompună în factori expresia:

$$yz(x-1)^3(y-z) + xz(y-1)^3(z-x) + xy(z-1)^3(x-y).$$

V. Alaci

116. — Să se demonstreze că dacă

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

atunci rapoartele

$$\frac{(AE-BD)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)}{A},$$

$$\frac{(AC-B^2)(DE-BF)-(BE-CD)(DB-AE)}{B},$$

$$\frac{(CD-BE)^2-(B^2-AC)(E^2-CF)}{C},$$

$$\frac{(AE-BD)(DE-BF)-(BE-CD)(D^2-AB)}{D},$$

$$\frac{(CD-BE)(DE-BF)-(BD-AE)(E^2-CF)}{E},$$

$$\frac{(DE-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)}{F}$$

sunt toate egale între ele și egale cu $-\Delta$.

Locot-Col. Gh. Buicliu

117. — Fie $\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}-n\sqrt{2}}$,

$$\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}-m\sqrt{2}},\quad \gamma = -\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}$$

Să se arate că dacă:

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\omega$$

rezultă și $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=\omega$.

A. Th. Nicolau

118. — Laturile a, b, c ale unui triunghiu, fiind numere întregi, expresiunea:

$$E = 2[h_a(r_b+r_c)+h_b(r_a+r_c)+h_c(r_a+r_b)]$$

este un patrat perfect și să se afle care este acea rădăcină.

Emil Ștefănescu

119. — Fie AA' și BB' două coarde paralele ale unui cerc și P punctul de intersecție al dreptelor AB' și A'B.

Insemnăm cu R raza cercului, $AA'=2a$, $BB'=2b$ și $\widehat{APB}=\theta$.

Să se demonstreze că

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{R^2-b^2}+b\sqrt{R^2-a^2}}{ab-\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}}$$

Maior O. Bugeanu

120. — Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\sin 2x + \cos 3x = m\cos x$$

caz particular $m=-1$.

N. Abramescu.

121. — Uzina U_1 alimentează atelierele A_1, B_1; uzina U_2 atelierele A_2, B_2; iar uzina U_3 atelierele A_3, B_3. Toate uzinele debitează curent sub același voltaj.

Cum s'ar putea cunoaște la un birou central C al acestor trei uzine, făcându-se o instalație simplă, anume care ateliere funcționează la un moment dat? (se admite că în același atelier lucrul este totdeauna la fel de intens).

Problema se va rezolva pentru următoarele date.

Consumul atelierelor:

$A_1 = 200\ amp.$, $A_2 = 300\ amp.$, $A_3 = 50\ amp.$,

$B_1 = 150\ amp$, $B_2 = 250\ amp.$, $B_3 = 350\ amp.$

Distanțele, accesibile întinderei cablului, dela ateliere la biroul central și uzine:

$B_1C = 500\ m.$, $B_1A_1 = 700\ m.$, $A_1U_1 = 600\ m.$

$B_2C = 800\ m.$, $B_2A_2 = 400\ m.$, $A_2U_2 = 900\ m.$

$B_3C = 300\ m.$, $B_3A_3 = 500\ m.$, $A_3U_3 = 1200\ m.$

Lt I. D. Cernătescu.

INFORMATIUNI

A început să apară în fascicole litografiate, *Cursul de mecanică elementară*, făcut cu studenții anului pregătitor al Școalei Politechnice din Timișoara de către d-l Ing. C. Teodorescu, subdirectorul Școlii.

Acest curs tratează materia de cinematică, statică și dinamică bazându-se numai pe cunoștințele de aritmetică, geometrie, algebră și trigonometrie obținute în liceu. Exemplele sunt luate mai mult din technică, și nu sunt pure exerciții de matematică. La fiecare capitol se găsesc un număr de probleme pentru rezolvat, unele din ele cu răspunsurile lor, aranjate în ordine de greutate și referindu-se la materia parcursă până în acel loc.

Sumar. Mișcare. Cauzele mișcării. Forțele fără mișcare. Lucru mecanic, putere. Mașini simple. Energia și transformarea ei. Mișcare relativă. Impuls și percursiuni. Hidrostatică.

Cursul va cuprinde 15 fascicole în 8 pagini format No. 1 litografiate și corespondenții noștri care doresc să-l cumpere pot să se înscrie trimițând 20 lei la administrația revistei și vor primi fascicolele regulat în ordinea apariției lor.

Recomandăm acest curs în special elevilor din cl. VIII care doresc să se îndrepte către carierile technice, pentru pregătirea cărora mecanica joacă un rol important.

„Societatea matematică Bârlădeană" sub conducerea d-lui prof. Martiniuc, urează „Revistei Matematice" din Timișoara, cu ocazia începutului noului ei an de activitate, viață lungă spre folosul a cât mai multe serii de tineri care prind dragoste de matematici și răușesc să transforme matematica dintr'o știință aridă într'o „artă" datorite Revistei iar nașilor acestei Reviste — Bârladul le urează de asemenea viață lungă spre a se putea mult timp bucura de roadele entusiasmului și muncei depuse spre folosul tinerimei.

Bârladul urează fericire tuturor ce știu să provoace atâta mulțumire și entusiasm prin Matematici"!

Seria conferințelor publice, deschisă la Școala Politechnică din Timișoara, s'a sfârșit înainte de vacanța Paștelui, urmându-se după programul anunțat cu mici modificări. S'au ținut astfel 13 conferințe cu subiecte științifice și technice.

6 Dec. *V. Vâlcovici* — Teoria relativității. Principiul relativității speciale.

13. Dec. *V. Vâlcovici* — Teoria relativității. Principiul relativității generale.

20 Dec. *V. Vâlcovici* — Teoria relativității. Considerații asupra universului deduse din teoria lui Einstein.

27 Dec. *Ing. D. Leonida* — Apele noastre.

31 Ian. *Lt.-Col. Gh. Buicliu* — Aplicațiile telegrafiei fără fir.

7 Feb. *Ing. St. Caraman* — Problema silvică în România-Mare.

21 Feb. *V. Vâlcovici* — Cât de mare e universul.

28 Feb. *Dr. Ing. C. Stăncescu* — Natura, conservarea și transformarea energiei.

7 Mart. *Ing. V. Blașian* — Probleme de economie națională.

14 Mart. *Ing. M. Manoilescu* — Principiile unui program de desvoltare industrială.

21 Mart. *Dr. D. Hurmuzescu* — Teoria electrică a materiei.

28 Mart. *Ing. Insp. Gen. Ion Ionescu* — Lucrările publice la Romani sub Imp. Traian.

4 April. *G. Țițeica* — Concepții noi despre spațiu.

Inchiderea seriei de conferințe se va face prin o serbare la 1 Mai, când d-l profesor *N. Iorga* va veni la Timișoara pentru a ține o conferință. Cu această ocazie Societatea Studenților Școalei Politechnice a aranjat un festival artistic care va completa programul serbării.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMISOARA.

ANUL II. 15 MAI 1922 NO. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. G BRATU. REZOLVIREA ECUATIILOR IN MOD GRAFIC.
2. PROBLEME REZOLVATE.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. NOTE MATEMATICE.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Gratice «Cartea Românească»
1922

Avem plăcerea a a anunța corespondenților noștri că dela 1 Mai 1922, fac parte din comitetul Revistei Matematice din Timișoara și d-nii:

Abasohn Ernest inginer licențiat în matematici, profesor la liceul Cantemir, Justinian 18, București.

D-na Alexandrescu Elena, profesoară la externatul secundar de fete, Constanța.

Banciu I., profesor, str. Lucaci 95, București.

Caraman E. profesor la liceul din Galați.

Duțulescu Marin, licențiat în matematici, inspector financiar, Eminescu 20, București.

Ionescu K. C., profesor liceul real Brașov.

Maior Liteanu Gh., Aleea Sevastopol 27, București.

Manughevici C., inginer chimist, șef de lucrări la Școala Politechnică Timișoara.

Nichifor G., conferențiar la Universitatea București, profesor secundar, D-tru Racoviță 32, București.

Orășeanu Cezar, inginer, licențiat in matematici, profesor la Școala Politechnică București, Știrbei-Vodă, 45. București.

Roibănescu C., directorul liceului Tg.-Jiu.

Saegiu E., inginer, Berzei 70, București.

Simniceanu Sava, directorul școalei normale, Craiova.

Spineanu Cezar, profesor și deputat, Târgoviște.

Sudan C., profesor la liceul Cantemir, București.

Thierrin Gh., profesor, directorul institutului Schewitz Thierrin, Scaune 33, București.

Locot. Zapan Grigorie din artilerie.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **Ing. M. Vasiliu** sub-directorul Fabricei de Tutun, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL II. — NO. 3. TIMISOARA, 15 MAI 1922

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Inginer M. VASILIU, Fabrica de Tutun, Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

REZOLVIREA ECUAȚIILOR IN MOD GRAFIC

de G. BRATU
profesor la univ. Cluj

Oăsesc în *Introduction à la Science de l'ingénieur* de *Claudel* și *Dariès* (t. II, p. 1266, Paris, 1913) următoarea metodă grafică pentru rezolvirea ecuațiilor de gradul al 2-lea, al 3-lea și al 4-lea cu ajutorul parabolei $y = x^2$.

1. *Ecuații de gradul al doilea.* Fie ecuația.

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Punând $y = x^2$, rezolvirea ecuației (1) se reduce la căutarea absciselor punctelor comune ale curbelor.

$$y = x^2. \tag{2}$$

$$ay + bx + c = 0. \tag{3}$$

Prima e parabola $y = x^2$ pe care o putem avea tipărită pe hârtia milimetrică. A doua e *o dreaptă*. Deci rezolvirea ecuației (1) se reduce la construirea dreptei (3).

Dreapta (3) poate fi secantă, tangentă sau exterioară parabolei (2). Abscisele punctelor de intersecție sunt rădăcinele reale ale ecuației (1).

2. *Ecuații de gradul al treilea.* Impărțind ecuația cu coeficentul termenului de gradul cel mai înalt, o putem scrie

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{4}$$

Putem face să dispară termenul de grad 2. Făcând substituția clasică

$$x = z + h$$

ecuația (4) devine

$$(z+h)^3 + a(z+h)^2 + b(z+h) + c = 0.$$

sau, ordonând după puterile lui z,

$$z^3 + (3h + a)z^2 + \ldots = 0 \tag{5}$$

Cum h nu e determinat, îl putem alege așa ca $3h + a$ să fie nul, adică $h = -\frac{a}{3}$. Cu această valoare a lui h, ecuația (5) e de forma

$$z^2 + pz + q = 0. \tag{6}$$

Deci orice ecuație de gradul al treilea se poate scrie sub forma (6).

Să luăm dar ecuația de gradul (3).

$$x^3 + px + q = 0. \tag{7}$$

Inmulțind cu x obținem

$$x^4 + px^2 + qx = 0. \tag{8}$$

Ecuația (8) are 4 rădăcini: una este $x = 0$; celelalte trei sunt rădăcinile ecuației (7).

Făcând $y = x^2$, ecuația (8) devine

$$y^2 + py + qx = 0, \tag{9}$$

și rezolvirea ecuației (8) se reduce la căutarea absciselor punctelor comune ale curbelor

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 + py + qx = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Putem înlocui una din aceste ecuații prin suma lor

$$x^2 + y^2 + (p-1)y + qx = 0. \tag{11}$$

Deci rezolvirea ecuației (8) se reduce la căutarea absciselor punctelor comune ale curbelor

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 + qx + (p-1)y = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Prima este parabola (2) pe care o presupunem tipărită pe hârtia milimetrică. A doua este *un cerc*, care are centrul în punctul $-\frac{9}{2}, -\frac{p-1}{2}$ și care trece prin origine.

Deci rezolvirea unei ecuații de gradul al treilea se reduce la *construirea unui cerc*. Rădăcinile ecuației (7) sunt abscisele punctelor de intersecție ale parabolei (2) cu cercul (11) *afară de origine*.

3. *Ecuații de gradul al patrulea.* Procedând ca și la ecuațiile de gradul al treilea, prin substituția $x = z + h$, luând o valoare convenabilă pentru h, putem face în totdeauna să dispară termenul de grad 3. Vom scrie dar ecuația sub forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \tag{13}$$

Făcând $y = x^2$, ecuația devine

$$y^2 + py + qx + r = 0 \tag{14}$$

și rezolvirea ecuației (13) se reduce la căutarea absciselor punctelor comune ale curbelor

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 + py + qx + r = 0 \end{cases} \tag{15}$$

sistem echivalent cu

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 + qx + (p-1)y + r = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Prima este aceeași parabolă, care a intervenit și în problemele precedente; a doua este *un cerc* cu centrul în punctul

$$-\frac{q}{2}, -\frac{p-1}{2}$$

și cu raza

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + (p-1)^2 - 4r}.$$

Astfel și rezolvirea unei ecuații de gradul al patrulea se reduce tot la *construirea unui cerc*, pe hârtia milimetrică, pe care presupunem construită, odată pentru totdeauna, parabola $y = x^2$, care trece prin origine, e simetrică față de axa Oy și e situată deasupra axei Ox (de partea y-lor pozitivi).

4. *Observații.*

a) Pentru *ecuațiile de gradul al doilea* observăm că o dreaptă tae o parabolă în cel mult 2 puncte.

Dacă dreapta (3) e *secantă* față de parabola (2), ecuația (1) are 2 rădăcini reale și distincte.

Dacă dreapta e *tangentă* la parabolă, ecuația are o singură rădăcină reală (se zice 2 rădăcini reale egale).

Dacă dreapta *nu tae* parabola (e *exterioară* parabolei), ecuația (1) are rădăcinile imaginare.

b) Pentru *ecuațiile de gradul al treilea* avem de căutat intersecția unei parabole cu un cerc, *care se întâlnesc întotdeauna în origine.*

Deci: sau cercul e *tangent* în origine la parabolă și atunci $x = 0$ este o rădăcină a ecuației (7); sau cercul e *secant* și atunci tae parabola *cel puțin într'un alt punct* afară de origine. Deci o ecuație de gradul al treilea are totdeauna o rădăcină reală.

c) In cazul *ecuațiilor de gradul al patrulea* (13), cercul și cu parabola (16) nu mai au niciun punct *necesar comun.* Deci o ecuație de gradul al patrulea poate avea și toate rădăcinile imaginare. E cazul când cercul e complect exterior sau complect interior parabolei (2).

PROBLEME REZOLVATE

15. — *Se consideră cele trei cercuri tangente interior la câte două din laturile triunghiului* ABC *și la cercul înscris. 1°. Să se calculeze razele acestor cercuri în funcțiune de laturile triunghiului. 2°. Să se determine raportul dintre suprafața triunghiului dat și suprafața triunghiului format de centrele celor trei cercuri.*

V. ALACI

Soluție dată de d-l *I. B. Florescu* (lic. Craiova). 1°. O_a, O_b, O_c, centrele cercurilor înscrise în unghiurile A, B, C și tangente la cercul înscris cu centrul 1; să însemnăm cu ρ_a, ρ_b, ρ_c, razele acestor cercuri, iar r raza cercului înscris. Centrele O_a, O_b, O_c sunt respectiv pe dreptele Al, BI, CI.

Fie M și N proecțiile punctelor I și O_a pe AB, Din asemănarea triunghiurilor AIM și AO_a N. rezultă

$$(1) \qquad \frac{AI}{AO_a} = \frac{IM}{O_aN}.$$

Dar

$$AI = \frac{IM}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$AO_a = AI - IO_a = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} - r - \rho_a$$

Inlocuind în (1) pe AI, AO_a, $IM = r$, $O_aN = \rho_a$, avem

$$\frac{\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}}{\frac{r}{\sin\frac{A}{2}} - r - \rho_a} = \frac{r}{\rho_a}; \quad \rho_a = r\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}$$

Dar

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$2p = a+b+c, \; 2(p-a) = b+c-a;$$

deci

$$\rho_a = r\frac{\sqrt{bc} - \sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sqrt{bc} + \sqrt{(p-b)(p-c)}} = r\frac{\left[\sqrt{bc} - \sqrt{(p-b)(p-c)}\right]^2}{bc - (p-b)(p-c)},$$

$$\rho_a = r\frac{\left[bc - \sqrt{(p-b)(p-c)}\right]^2}{-p^2 + p(b+c)} = r\frac{\left[bc - \sqrt{(p-b)(p-c)}\right]^2}{p(p-a)}.$$

In mod analog găsim

$$\rho_b = r\frac{\left[\sqrt{ca} - \sqrt{(p-c)(p-a)}\right]^2}{p(p-b)},$$

$$\rho_c = r\frac{\left[ab - \sqrt{(p-a)(p-b)}\right]^2}{p(p-c)},$$

2°. Suprafața triunghiului O_aIO_b este

$$\frac{1}{2} IO_a \cdot IO_b \cdot \sin O_aIO_b.$$

Dar

$$\widehat{O_aIO_b} = 180^0 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 90^0 + \frac{C}{2};$$

$$IO_a = r + \rho_a, \; IO_b = r + \rho_b$$

Deci

$$\text{aria } O_aIO_b = \frac{1}{2}(r+\rho_a)(r+\rho_b)\cos\frac{C}{2}$$

In mod analog

$$\text{aria } O_bIO_c = \frac{1}{2}(r+\rho_b)(r+\rho_b)\cos\frac{A}{2}$$

$$\text{aria } O_cIO_a = \frac{1}{2}(r+\rho_c)(r+\rho_a)\cos\frac{B}{2}$$

Deci

$$\text{aria } O_aO_bO_c = O_aIO_b + O_bIO_c + O_cIO_a =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(r+\rho_a)(r+\rho_b)\cos\frac{C}{2} + \right.$$

$$\left. + (r+\rho_b)(r+\rho_c)\cos\frac{A}{2} + (r+\rho_c)(r+\rho_a)\cos\frac{B}{2}\right]$$

Observare. Raportul ariilor triunghiurilor $O_aO_bO_c$ și ABC, în funcțiune numai de laturi, se poate ușor calcula, ceiace așteptăm dela corespondenții noștri.

56. — *Fie x' și x'' rădăcinele ecuații $x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care are ca rădăcini*

$$y' = \frac{x'-x''}{x'}, \; y'' = \frac{x''-x'}{x''}$$

Să se studieze apoi variația rădăcinilor ecuației în y. Să se determine q astfel în cât să avem $y'^2 + py' + q = y''^2 + py'' + q$ și să se studieze apoi variația rădăcinilor ecuații în y, p fiind un parametru variabil.

N. ABRAMESCU

Avem

$$(1)\qquad y'+y''=\frac{x'-x''}{x'}+\frac{x''-x'}{x''}=$$

$$=\frac{2x'x''-x'^2-x''^2}{x'x''}=\frac{4x'x''-(x'+x'')^2}{x'x''}=\frac{4q-p^2}{q}$$

$$(2)\qquad y'y''=\frac{x'-x''}{x'}\cdot\frac{x''-x'}{x''}=\frac{-(x'-x'')^2}{x'x''}=$$

$$=\frac{-(x'+x'')^2+4x'x''}{q}=\frac{4q-p^2}{q}.$$

Deci ecuația care are rădăcinile y' și y'' este

$$(3)\qquad y^2-\frac{4q-p^2}{q}y+\frac{4q-p^2}{q}=0.$$

Realizantul acestei ecuații este

$$\left(\frac{4q-p^2}{q}\right)^2-4\frac{4q-p^2}{q}=\left(p^2-4q\right)\frac{p^2}{q^2}.$$

Dacă $p^2-4q<0$, rădăcinile y' și y'' sunt imaginare. Dacă $p^2=4q$, rădăcinile $y'=y''=0$. Să studiem rădăcinile în cazul $p^2-4q>0$. Din (1) și (2) rezultă că $(y'+y'')$ și $y'y''$ au același semn, semnul lui q. Dacă $q>0$, rădăcinile y' și y'' sunt una negativă, alta pozitivă, cea mai mare in valoare absolută fiind cea negativă. Dacă $q<0$, y' și y'' sunt ambele pozitive.

Dacă avem

$$y'^2+py'+q=y''^2+py''+q,\qquad \text{urmează}$$

$$y'^2+py'=y''^2+py'',\ (y'-y'')(y'+y''+p)=0,$$

adică $y'-y''=0$, ceeace are loc când $p^2-4q=0$ și atunci $y'=y''=0$, sau când

$$y'+y''+p=0;\ \frac{4q-p^2}{q}+p=0;\ q=\frac{p^2}{p+4}.$$

In acest caz ecuația care dă rădăcinile y' și y'' este, observând (3).

$$y^2+py-p+0.$$

Realizantul este $p(p+4)$ și deci, dacă $p<-4$, y' și y'' sunt reale, pozitive; $-4<p<0$, y', y'' imaginare; $p>0$, y', y'' reale, una negativă, alta pozitivă, cea negativă fiind cea mai mare în valoare absolută. Dacă

$$p=0,\ y'=y''=0;\ p=-4,\ y'=y''=2.$$

Au rezolvit problema d-nii: C. Chiorescu, Gr. Goilav, A. Miclescu, Sor. Niculescu, St. Popescu, M. Săvescu, Solomon Ludovic, Al. Șendreanu, Ioan B. Florescu, Georgescu I. C., Mircea St. Popescu, Iorgulescu C-tin, Gh. D. Popescu.

61. *Să se calculeze suma.*

$$S=1+22+333+\ldots+nnn\ldots n.$$

I. DUMITRIU-ARAD

Soluție dată de d-nii: *Georgescu Er. Florian* (liceul Cantemir) și *Teodorescu St. I.*

Putem scrie:

$$S=1+2(1+10)+3(1+10+10^2)+\ldots$$
$$\ldots+n(1+10+\ldots+10^{n-1})$$

In fiecare paranteză avem o progresie geometrică cu rația 10 și însumate avem:

$$(1)\quad S=\frac{10-1}{9}+2\frac{10^2-1}{9}+3\frac{10^3-1}{9}+\ldots$$

$$\ldots+n\frac{10^n-1}{9}=\frac{1}{9}\Big[10+2.10^2+3.10^3+\ldots$$

$$\ldots+n.10^n-(1+2+3+\ldots+n)\Big]$$

Pentru a efectua însumarea,

$$10+2.10^2+3.10^3+\ldots+n.10^n$$

să considerăm următoarea progresie geometrică însumată.

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

Presupunând x variabil și derivând ambii membrii, avem:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=$$
$$=\frac{[(n+1)x^n-1](x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{(n+1)x^n-1}{x-1}-\frac{x^{n+1}-x}{(x-1)^2}$$

Multiplicând ambii membrii cu x și în urmă făcând $x = 10$, avem:

$$10 + 2.10^2 + 3.10^3 + \ldots + n.10^n =$$
$$= \frac{10}{9}\left[(n+1)\,10^n - 1\right] - \frac{10^2}{9^2}(10^n - 1) =$$
$$= \frac{10^{n+1}}{9}\left(n + 1 - \frac{10}{9}\right) - \frac{10}{9}\left(1 - \frac{10}{9}\right) =$$
$$= \frac{10^{n+1}}{9}\left(n - \frac{1}{9}\right) + \frac{10}{9^2}$$

Inlocuind în (1), putem scrie:

$$S = \frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+1}}{9}\left(n - \frac{1}{9}\right) + \frac{10}{81} - \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Aceasta este formula de însumare. Pentru $n=1, 2, 3, \ldots$ găsim $S = 1, 23, 356, \ldots$ care sunt sumele $1,\ 1+22,\ 1+22+333, \ldots$

Au dat soluțiuni mai lungi d-nii: *I. N. Georgescu-Val, Miclescu Andrei,* (elevi Școala Militară de Artilerie), *Popescu Mircea și Ulmann Octav.*

75.—*Să se arate că dacă avem* $s = a+b+c+d$ *avem și*

$$(as + bs + cd)(bs + cs + ad)(cs + ds + ab)$$
$$(ds + as + bc) = (a+b+c)^2 (a+b+d)^2 \times$$
$$\times (a+c+d)^2 (b+c+d)^2$$

I. DUMITRIU-ARAD

I. Soluție dată de d-nii: *A. Th. Nicolau* și *Mircea Bobârnac.*

Avem succesiv:

$$as+bs+cd = (a+b)s + cd = [s-(c+d)]s + cd =$$
$$= s^2 - (c+d)s + cd = (s-c)(s-d) =$$
$$= (a+b+d)(a+b+c)$$

$$bs+cs+ad = (b+c)s + ad = [s-(a+d)]s + ad =$$
$$= s^2 - (a+d)s + ad = (s-a)(s-d) =$$
$$= (b+c+d)(a+b+c)$$

$$cs+ds+ab = (c+d)s + ab = [s-(a+b)]s + ab =$$
$$= s^2 - (a+b)s + ab = (s-a)(s-b) =$$
$$= (b+c+d)(a+c+d)$$

$$ds+as+bc = (a+d)s + bc = [s-(b+c)]s + bc =$$
$$= s^2 - (b+c)s + bc = (s-b)(s-c) =$$
$$= (a+c+d)(a+b+d)$$

De unde prin înmulțire se capătă tocmai relația cerută.

II. Solutie dată de d-l *Octav Ulman.*

Dacă se înlocuește s, cu valoarea dată, se capătă succesiv:

$$as + bs + cd = (a+b+c)(a+b+d)$$
$$bs + cs + ad = (b+c+a)(b+c+d)$$
$$cs + ds + ab = (c+d+a)(c+d+b)$$
$$ds + as + bc = (d+a+b)(d+a+c)$$

pe care inmulțindu-le găsim relația cerută.

Generalizare dată de d-nii *M. I. Șerbănescu, Dili C. Schileru, Popescu N. Ștefan, I. Coșereanu și Nicu Pârâianu.*

Fie $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Atunci vom avea:

$$(a_1a_2 + a_3s + \ldots + a_n s)(a_2a_3 + a_1s + \ldots + a_n s)\ldots$$
$$\ldots (a_n a_1 + a_2s + \ldots + a_{n-1}s) =$$
$$= (a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^2 (a_1 + a_3 + \ldots + a_n)^2 \ldots$$
$$\ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})^2$$

In adevăr,

$$a_1a_2 + a_3s + \ldots + a_n s = (s - a_1)(s - a_2).$$

Membrul întâi al identității se poate dar scrie:

$$(s-a_1)^2 (s-a_2)^2 (s-a_3)^2 \ldots (s-a_n)^2$$

care nu este altceva de cât membrul al doilea.

Mai general avem:

$$(a_1a_2 + a_3s + \ldots + a_n s)^n \ldots$$
$$\ldots (a_n a_1 + a_2s + \ldots + a_{n-1}s)^n =$$
$$= (a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^{2n} \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a^{n-1})^{2n}$$

Au rezolvat bine problema și d-nii: *C. Goilav, Miclescu Andrei, M. Gh. Săvescu, Gh. D. Popescu, A. Kanner, M. Conduratu, Pavlu Eduard, Măru Dumitru* și *M. Dan, Ernest Oprișan, I. Somovici, Jean Propst, Const. Georgescu, Ștefăniu Vasile* și *Teodor Nicuță, M. I. Șerbănescu, Bușilă Adrian, Florea Negretzu, Georgescu Florian, Stoenescu, Const Berdan, Arcadian Nicolae, Ristea Marin, Trincă Marin, Dobrescu Filip, Ionescu Iilie, Caracas Ștefan, Prundeanu Ilie, Ciolacu St. Miron, Tiberiu Popovici, Ștefănescu Emil, Gârlișteanu M., Alex. Școdrea, Valeriu Stamatescu, Al. Brăileanu, N. Georgescu-Roegen, Mărienuț Uroș, Vasiliu D. Virgil, Aurel T. Dumitriu, I. N.*

Georgescu-Val, Gr. C. Moisil, Filip C., Popescu I. Gheoghe, Bogdan P. Martinian, Giotta Vicenţiu, Nicu Stănescu, Nicu D. Mucichescu, Gogălniceanu M. Mihail, Georgescu I. C., Glasberg Rob, Tenea W. Ioan, M. Gâtan, Fântâneanu Ioan, I. St. Theodorescu, Beşliu Gh., Amărăscu O. Gavril, Ioan I, Resceanu, Angello de Mayo, Rosetel Boju, Silion Gh. Ion, Ursescu D. Gheorghe, Dinulescu N. Niculae, S. Musta. Gheorghe Melinte, Cr. Rigani.

Generalizări au mai dat şi d-nii: *Gh. D. Popescu, I. Samovici, M. Şerbănescu Tiberiu Popovici* şi *Stoenescu A. Ion.*

77. — *Să se rezolve, servindu-se de table de logaritmi, ecuaţiunea numerică următoare:*

$$634295{,}7\cos x + 195066{,}7\sin x = 636342{,}5.$$

M. VASILIU

Soluţie dată de d-l *Cristea Goilav* student Bucureşti şi *C. Beşliu* Şcoala Politechnică din Timişoara.

Ecuaţia dată este de forma generală cunoscută

$$a\cos x + b\sin x = c$$

de care scriind'o sub forma $\cos x + \frac{b}{a}\sin x = \frac{c}{a}$

şi punând $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\varphi$, devine:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\sin\varphi$$

în care prin urmare vom avea:

$a = 634295{,}7$, $b = 195066{,}7$, $c = 636{,}342{,}5$ şi

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{195066{,}7}{634295{,}7}$$

de unde, prin aplicarea logaritmilor, căpătăm:

$$\log\operatorname{ctg}\varphi = \log 195066{,}7 - \log 634295{,}7 = \\ = 1{,}4878913 = \log\operatorname{ctg} 72^0 54'20''$$

de unde scoatem:

$$\varphi = 72^0 54'20''$$

şi atunci ecuaţia noastră devine:

$$\sin(x + 72^0 54'20'') = \frac{636342{,}5}{634295{,}7}\sin 72^0 54'20''.$$

Aplicând iar logaritmii căpătăm:

$$\log\sin(x + 72^0 54'20'') = \\ \log 636342{,}5 + \log\sin 72^0 54'20'' - \log 634295{,}7 = \\ \log\sin 73^0 31'2'',4$$

sau de unde:

$$x + 72^0 54'20'' = 73^0 31'2'',4 + 2k\pi$$

care ne dă $x = 0^0 36'42'',4 + 2k\pi$

şi $x + 72^0 54'20'' = \pi - 73^0 31'2'',4 + 2k'\pi =$

$$= 106^0 28'57'',6 + 2k'\pi$$

sau de unde

$$x = 33^0 34'37'',6 + 2k'\pi$$

care sunt cele două soluţiuni a problemei.

Au rezolvit problema bine, următorii domni: *Robert Glasberg* student Arhitectură Bucureşti, *Marinescu V. Ioan, Andrei Miclescu, Dragomirescu Buzne-Eduard* elevi Şcoala Militară de Artilerie Timişoara, *Călin I. Aureliu* Şcoala Militară de Geniu Bucureşti.

Din clasa VIII liceală d-l *Gh. D. Popescu* liceul Internat Iaşi.

Din clasa VII liceală *Dobrescu N. Nicolae* Galaţi, *Nicolescu Is. Isaia* Ploeşti, *Modrogan Ion* Ploeşti, *Const. E. Georgescu* Cantemir-Vodă Bucureşti, *T. Georgescu* Ploeşti, *Eduard Pavlu* Galaţi, *Nicuţă Teodoru* Huşi.

Din clasa VI liceală *Silion Gh. Ion* Câmpina, *Valeriu I. Stamatescu* S. P. U. Bucureşti, *Virgiliu Ghiţescu* Mihai-Viteazul Bucureşti, *Tiberiu Popovici* Moise Nicoară Arad, *Şcodreanu Alexandru* Silistra, *Florea Negretzu* Piteşti, *M. T. Şerbănescu* şi *Buşilă Adrian* Mihai-Viteazul Bucureşti şi *Ioan S. Antoniu* Mânăstirea Dealul Târgovişte.

84. — *Dacă* V *este un punct în planul unui triunghiu* ABC *şi* m, n, p, q, r, s *segmentele determinate de proecţiile punctului* V *pe laturile* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, *avem relaţia.*

$$\sum a(m-n) = 0.$$

DILI C. SCHILERU

Fie A', B', C' proecţiile punctului V pe laturile BC, CA, AB, aşa că $BA' = m$, $A'C = n$, $CB' = p$, $B'A = q$, $AC' = r$, $C'B = s$. Fiindcă $a = m + n, \ldots$ primul membru al relaţii propuse devine

$$(1)\quad \Sigma a(m-n) = m^2 - n^2 + p^2 - q^2 + r^2 - s^2$$

Dar, din triunghiurile dreptunghice BVA', VA'C, avem

$$\overline{A'V}^2 = \overline{BV}^2 - \overline{BA'}^2,\ \overline{A'V}^2 = \overline{VC}^2 - \overline{A'C},$$

$$\overline{BV}^2 - \overline{BA'}^2 = \overline{VC}^2 - \overline{A'C}^2,$$

$$\overline{BA'}^2 - \overline{A'C}^2 = \overline{BV}^2 - \overline{CV}^2,\ m^2 - n^2 = \overline{BV}^2 - \overline{CV}^2.$$

In mod analog găsim

$$p^2 - q^2 = \overline{CV}^2 - \overline{AV}^2,\ r^2 - s^2 = \overline{AV}^2 - \overline{BV}^2,$$

şi, înlocuind în (1), avem

$$\Sigma a(m-n)=\overline{BV}^2-\overline{CV}^2+\overline{CV}^2-\overline{AV}^2+\overline{AV}^2-\overline{BV}^2=0,$$

şi deci relaţia propusă este demonstrată.

Generalizare dată de d-nii: P. Juster, A. T. Nicolau, Al. Şcodreanu, I. M. Şerbănescu.

Insemnând cu α_i, β_i segmentele determinate de proecţiile V_i $(i=1, 2, \ldots n)$ ale unui punct V pe laturile $A_1A_2=l_1$, $A_2A_3=l_2, \ldots A_nA_1=l_n$ ale unui poligon, să se arate că avem relaţia

$$\Sigma l_i(\alpha_i-\beta^i)=0.$$

Demonstraţia este analoagă. Din triunghiurile A_iVV_i, VV_iV_{i+1}, avem

$$\overline{VV_i}^2=\overline{VA_i}^2-\overline{A_iV_i}^2=\overline{VA_{i+1}}^2-\overline{V_iA_{i+1}}^2,$$

$$\overline{A_iV_i}^2-\overline{V_iA_{i+1}}^2=\overline{A_iV}^2-\overline{VA_{i+1}}^2,$$

$$\alpha_i^2-\beta_i^2=\overline{VA_i}^2-\overline{VA_{i+1}}^2$$

Relaţia propusă devine

$$\Sigma(\alpha_i+\beta_i)(\alpha_i-\beta_i)=\Sigma(\alpha_i^2-\beta_i^2)=$$

$$\overline{VA_1}^2-\overline{VA_2}^2+\overline{VA_2}^2-\overline{VA_3}^2+\ldots+\overline{VA_n}-\overline{VA_1}^2=0$$

Au rezolvat problema d-nii: *C. Berdan, A. Buşilă, C. Buşilă, I. Coşereanu, N. Dospinoiu, I. N. Georgescu, Fl. Georgescu, M. Grümbaum, C. E. Georgescu, R. Glasberg, V. Giota, V. Ghiţescu, I. Ioniţă, P. Juster, G. Mărculescu, N. Mucichescu, A. T. Nicolau, E. Oprişan, Popa Teodor, E. Pavlu, I. Popovici, Mircea Popescu, I. E. Rădulescu, I. M. Şerbănescu, Al. Scodreanu.*

86. — *Să se rezolve ecuaţiunea;*

$$x^4-(a^2+9c^2)x^3-(4b^2-9a^2c^2)x^2+4b^2(a^2+9c^2)x-36a^2b^2c^2=0.$$

GH. RADULESCU

Soluţie dată de d-l *A. T. Nicolau* student Bucureşti.

Desvoltăm parantezele şi ordonăm după puterile descrescătoare a monoamelor componente. Avem:

$$9a^2c^2(x^2-4b^2)-(a^2+9c^2)(x^2-4b^2)x+$$
$$+(x^2-4b^2)x^2=0$$

$$[x^2-(a^2+9c^2)x+9a^2c^2](x^2-4b^2)=0$$

de unde

$$x^2-(a^2+9c^2)x+9a^2c^2=0$$
$$x^2-4b^2=0$$

de unde

$$x_1=2b,\ x_2=-2b$$
$$x_3=a^2,\ x_4=9c^2.$$

Au dat soluţiuni bune, de asemenea şi d-nii: *N. Dospinoiu* conductor de lucrări publice, *Robert Glasberg* Şcoala de arhitectură Bucureşti, *Ioan M. Ioniţă* Şc. Militară de Artilerie Timişoara, *Solomon I. Asnaş* cl. VIII particulară Călăraşi, *Nicolescu Is. Isaiia* cl. VII Ploeşti, *Dinulescu N. Nicolae* Galaţi, *Măru Dumitru* liceul din Galaţi, *Nicu A. Nănescu* Craiova, *E. Iliescu* lic. „M-rea Dealul" Târgovişte, *Boju Rosetel* cl. VI Durostor „Silistra", *Al. Brăileanu* Constanţa, *Musta* cl. VI „Diaconovici-Loga" Timişoara, *Georgescu C. Ioan* cl. VI Piteşti, *Solomon Alfred* „Matei-Basarab" Bucureşti. *Vasilescu C. Virgiliu* cl. VII Ploeşti, *Jean Propst* T.-Severin, *Vasilache I., Popea Gh. Ovidiu* Cerna-Vodă. *Bănărescu A. Lucretius* „M-rea Dealul" *Livada Grigore, Atanasiu I. D-tru* cl. V „M-rea Dealul" *Vasiliu D. V.* Constanţa, *Puiu Juster, I. St. Teodorescu, Bonea Ioan, Gr. Rigani* Constanţa.

87. *Un tub termometric are la zero grade o secţiune interioară de 1 mm.² şi distanţa dintre divisiunile zero şi 100 este de 15 cm.; să se afle volumul rezervorului, coeficientul de dilataţie cubică a mercurului fiind 0,00018 şi al sticlei 0.000024.*

C. STANCESCU

Soluţie dată de d-l *Ion Curea*, Cluj.

Diviziunea zero a termometrului fiind la capătul tubului termometric, mercurul închide la zero grade numai volumul căutat.

Vom scrie că la 100° volumul mercurului este egal cu capacitatea care-l cuprinde.

Fie V_0 — volumul mercurului şi deci şi al rezervorului — la zero grade.

Volumul ocupat de mercur la 100° este:

$$V_0(1+0{,}00018\times 100),$$

iar capacitatea tubului, tot la 100°:

$$(V_0+150)(1+0{,}000024\times 100)$$

Prin urmare avem egalitatea:

$$V_0(1+0{,}018)=(V_0+150)(1+0{,}0024)$$

de unde găsim volumul căutat al rezervorului:

$$V_0 = 9638\ mm^3 = 9{,}628\ cm^3.$$

Au rezolvit de asemenea foarte bine problema, următorii d-ni: *Miclescu B. Andrei, Florea Negretzu, Popescu St., N. Miulescu.*

Au dat soluții apropiate d-nii: *Popa I. Teodor, Iancu Ismail, Dili Schileru, Ion I. Iliescu.*

89. — *Dacă a este un număr nedivizibil cu 7, expresiunea $E = a^{6n} + 5a^{3n} - 6$ este divizibil cu 49, când n este număr par.*

LT. GRIGORE ZAPAN

1° Soluțiune dată de d-l *Andrei Miclescu* Școala Militară de Artilerie Timișoara.

Expresiunea dată, se poate scrie succesiv:

$$E = a^{6n} + 5a^{3n} - 6$$

$$E = (a^{3n} + 1)(a^{3n} - 1) + 5(a^{3n} - 1)$$

$$E = (a^{3n} - 1)(a^{3n} - 1 + 7)$$

însă n fiind par, putem scrie $n = 2p$ și atuncea

$$E = (a^{4p} - 1)(a^{6p} - 1 + 7)$$

Expresiunea $a^{6p} - 1$ este divizibilă cu 7 și aceasta să invederează, dacă trecând dela valoarea p la $p+1$, ea să crească cu un multiplu de 7. In adevăr:

$$a^{6p+1)} - 1 - (a^{6p} - 1) = a^{6\,p+1)} - a^{6p} = a^{6p}(a^6 - 1)$$

însă după cunoscuta Teoremă a lui Fermat, avem

$$a^{6p}(a^6 - 1) = a^{6p}\,M7 \quad \text{sau} \quad a^6 - 1 = M7$$

și atuncea pentru expresiunea dată, avem:

$$E = M7\,(M7 + 7) = M49.$$

2°. Soluție dată de d-l *N. Dospinoiu* conductor de lucrări publice.

Expresiunea dată se poate scrie

$$E = (a^{3n} - 1)(a^{3n} + 6)$$

adică produsul a doi factori care diferă între ei de 7.

Dacă însemnăm $a^{3n} - 1 = k$, avem $E = k^2 + 7k$ care va fi divizibilă cu 49 odată cu divizibilitatea lui k prin 7, ceiace atrage $a^{3n} = M7 + 1$, de unde se vede că a în adevăr nu trebuie să fie multiplu de 7.

In ce privește valorile lui a, ele pot fi de forma:

$$a = M7 \pm 1,\ M7 \pm 2,\ M7 \pm 3$$

iar a^{3n} va fi de formele:

$$(M7 \pm 1)^{3n} = (M7 \pm 1)^n$$

$$(M7 \pm 2)^{3n} = (M7 \pm 8)^n = (M7 \pm 1)^n$$

$$(M7 \pm 3)^{3n} = (M7 \pm 27)^n = (M7 \pm 1)^n$$

dacă n este par, atuncea în toate cazurile, avem:

$$(M7 \pm 1)^n = M7 + 1$$

de unde $a^{3n} - 1 = M7$ și dar $E = M79$.

Prin una din aceste metode, au mai rezolvit problema și d-nii:

Din clasa VIII, *Stoenescu I. Alexandru*, București.

Din clasa VII: *Nicu Altănescu, Nicu Fârâianu* Pitești. *Aurel P. Sufletel* lic. militar „M-rea Dealul" *Const. E. Georgescu, Isaiia Niculescu.*

Din cl. VI: *Alfred Solomon*, „Matei Basarab" București, *Tiberiu Popoviciu* „Moise Nicoară" Arad, *Ioan S. Antoniu* „M-rea Dealu" Târgoviște, *I. M. Focșeneanu, Constantin Berdan* liceul Bârlad *Beatrice Wechsler* Galați, *Silion G. Ion, Florea S. Negretzu* Pitești, *Popescu N. Ștefan* Pitești, *M, Georgescu-Roegen* „M-rea Dealul", *Virgiliu Ghițescu* „Mihai-Viteazul" Bucuresti, *Alexandra Tauber* „Laurian" Botoșani, *Popa I. Teodor* „Spiru-Haret" București, *I. M. Șerbănescu* „Mihai-Viteazul" București, *E. Iliescu* „M-rea Dealul", *Antoniu S. Ion, Ionescu I. Ilie* lic. „Ioniță Asan" Caracal, *Dobrescu M. Filip* Caracal, *Școdreanu Alexandru* „Durostor" Silistra.

Din cl. V: *Constantinescu Jon, Sergiu Vasilache* M-rea Dealul" *Bănărescu Lucrețiu și Bonea Ion* „M-rea Dealul", *Wilhelm Solomon* „Matei-Basarab" București, *Vasiliu D. V. Constanța, Maximilian Grunfeld* „N. Bălcescu" Brăila,

Și d-nii: *Petru Cazanacei* Iași. *Gh. Stancu* „Unirea" Focșani, *Puiu Juster* P.-Neamț.

D l *I. M. Șerbănescu* observă că expresiunea E mai este divizibilă și prin 2 și prin 3 și dar prim $2.2.7^2 = 294$,

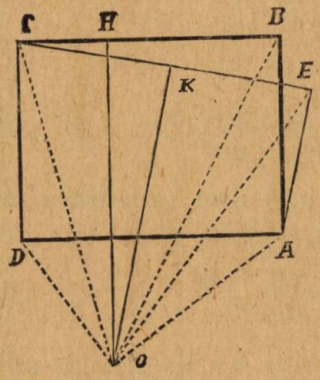
RECREATIUNI MATEMATICE

Sub acest titlu vom publica din când în când diferite *paradoxe matematice, probleme din vechime, probleme curioase, poate mici biografii*, care să aibă drept scop recrearea harnicilor noștri corespondenți. Aceste chestiuni le vom culege de multe ori din diferite cărți, cu titlul de mai sus, cărți care suntem siguri că nu stau la îndemâna

multora din corespondenții noștri. Înțelegem însă să publicăm, chestiuni analoage, gândite sau găsite și de corespondenții noștri, dacă vom crede că satisfac scopului urmărit.

Reamintim de altfel că și în anul trecut *Revista* noastră a publicat câteva „Probleme din Vechime" interesante. Incepem cu următorul paradox geometric.

Să se demonstreze că un unghiu drept este egal cu un unghiu obtuz.



Fie un dreptunghiu ABCD. Prin A ducem o dreaptă AE exterioară dreptunghiului, egală cu AB și făcând un unghiu ascuțit $\sphericalangle EAB$ Ducem CE și luăm mijloacele K și H a dreptelor CE, CB. Perpendicularele ridicate la aceste drepte cu punctele K și H se întâlnesc sigur într'un punct oarecare O, pentru că CB și CE nu sunt paralele.

Ducem OA, OD, OE, OC. Avem evident:

$$OA = OD \quad \text{și} \quad OE = OC$$

iar prin ipoteză, $AE = AB = CD$.

Egalitățile scrise, spun că triunghiurile ODC și OAE sunt egale ca având laturile lor respectiv egale. Rezultă că,

$$\sphericalangle ODC = \sphericalangle OAE,$$

sau,

$$(1) \quad \sphericalangle ODA + 90^0 = \sphericalangle OAD + \sphericalangle DAE$$

Dar în triunghiul isoscel ODA,

$$\sphericalangle ODA = \sphericalangle OAD$$

atunci din (1) deducem

$$\sphericalangle DAE = 90^0$$

Prin construcție însă $\sphericalangle DAE$ este obtuz, astfel că enunțul este justificat.

Rămâne pe seama corespondenților noștri a găsi explicația acestui paradox.

1) Récréations mathématiques par W. Rouse Ball.

BIBLIOGRAFIE

Revista de Matematicas y Fisicas elementales No. 9, Ian. 1922. Vacanțe de B. Ig. Baidaff. *No. 10 Febr. 1922,* probleme rezolvate. *No. 11, Martie 1922.* M. Faraday; Chestiuni de maxima și minima de P. Sergescu; Estereometria, formula prismoidal de I. S. Corti. Probleme rezolvate, probleme propuse, note matematice.

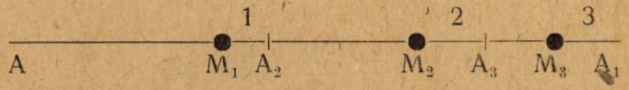
D-l Dr. B. Ig. Baidaff merită toate laudele pentru entuziasmul ce pune la publicarea acestei reviste. Numeroși colaboratori din țară a căror nume se găsește și pe paginile Gazetei Matematice și a Revistei Matematice din Timișoara, lucrează la această revistă din depărtata Argentină. Și după cum ne scrie d-sa în o scrisoare, revista sa este tot o fiică mai mică a Gazetei Matematice, și fiind în al treilea an de existență soră mai mare a Revistei Matematice din Timișoara.

Corespondenții noștri se pot abona la revista argentină trimițând 40 lei la Gazeta Matematică din București. Limba este ușoară, destul de ușor de urmărit pentru problemele din revistă, iar soluțiile se pot trimete și în românește.

Gazeta Matematică, No. 8, Aprilie 1922. Comentarii la un caz de intransiență a conceptelor matematice de N. Ionescu; Asupra unei colineațiuni a conicelor de Tr. Lalescu. † Paul Mansion de Ion Ionescu; Note matematice, chestiuni de examen, probleme rezolvate, exerciții, probleme propuse.

NOTE MATEMATICE

Asupra problemei 63. — Această problemă, propusă de d-l I. Dumitriu-Arad, a fost rezolvată la pagina 6, Anul al II. I s'a dat o soluțiune aritmetică și una algebrică. Se poate rezolva cu ușurință și prin metoda figurativă.



Să reprezentăm cu AA_1 suma cu care a început jocul. Fie M_1 mijlocul lui AA_1 și $M_1A_2 = 1$: A_1A_2 va reprezenta suma cu care a început jocul al doilea. Fie M_2 mijlocul lui A_1A_2 și $M_2A_3 = 2$; la începutul jocului al treilea a avut A_1A_3 pe care a perdut-o în întregime la jocul al 3-lea, M_3 fiind mijlocul lui A_1A_3, conform enunțului avem $M_3A_1 = 3$ deci:

$$A_1A_3 = 2A_1M_3 = 6$$
$$A_1M_2 = A_1A_3 + A_3M_2 = 6 + 2 = 8$$

$A_1A_2 = 2A_1M_2 = 16$

$A_1M_1 = A_1A_2 + A_2M_1 = 16 + 1 = 17$

$A_1A = 2A_1M_1 = 34$ lei.

MAIOR O. BUGEANU

Asupra problemei 13. (Vol. I, pag. 58). Imi propun să generalizez problema 13. Pentru aceasta, luăm binomul lui Newton:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}$$

$$x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

și facem pe $x = -\frac{b}{a}$ și $m = -c$, avem:

$$\left(1-\frac{b}{a}\right)^{-c} = \left(\frac{a}{a-b}\right)^c = 1 + \frac{c}{1!}\cdot\frac{b}{a} +$$

$$+ \frac{c(c+1)}{2!}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{c(c+1)(c+2)}{3!}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{c(c+1)\dots(c+n-1)}{n!}\cdot\frac{b^n}{a^n} + \dots$$

dacă aici facem pe $b = 1$, $c = 2$, suntem în cazul problemei 13, căci avem:

$$\left(\frac{a}{a-1}\right)^2 = 1 + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a^3} + \dots + \frac{n+1}{a^n} + \dots$$

Dacă facem pe $b = 1$, $c = 3$, avem:

$$\left(\frac{a}{a-1}\right)^3 = 1 + \frac{3}{a} + \frac{6}{a^2} + \frac{10}{a^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{(n+2)(n+1)}{2a^n} + \dots$$

I. T. RIZESCU
(elev lc. Constanța)

Asupra problemei 13 propusă de d-l Locot. I. Linteș.

Considerăm seria:

$$S = \alpha + r + \frac{\alpha+2r}{a} + \frac{\alpha+3r}{a^2} + \dots + \frac{\alpha+(n+1)r}{a^n}$$

în care $a > 1$ și ne propunem să-i calculăm suma. Putem pune această serie sub forma:

$$S = \alpha\left[1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n}\right] +$$

$$+ r\left[1 + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} + \dots + \frac{n+1}{a^n}\right].$$

Urmând un procedeu analog cu cel întrebuințat la rezolvirea problemei propuse de d-l Locot. I. Linteș, și observând că

$$1 + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} + \dots + \frac{n+1}{a^n} =$$

$$= \frac{(n+1)(1-a) - (1-a^{n+1})a}{a^n(1-a)^2}$$

căpătăm:

$$S = \frac{\alpha(1-a)(1-a^{n+1}) + r[(n+1)(1-a) - (1-a^{n+1})a]}{a^n(1-a)^2}$$

Făcând $n = \infty$ și înlăturând nedeterminarea aparentă după regulile cunoscute, găsim:

$$S = \frac{a[ar - \alpha(1-a)]}{(1-a)^2} \qquad (1)$$

De unde pentru $\alpha = 0$, $r = 1$ căpătăm soluția problemei 13:

$$S = \left[\frac{a}{1-a}\right]^2$$

O serie asemănătoare cu aceasta și tot atât de interesantă este:

$$S_1 = 1^2 + \frac{2^2}{a} + \frac{3^2}{a^2} + \dots + \frac{(n+1)^2}{a^n} + \dots \quad (a > 1)$$

în care numărul termenilor este infinit.

Putem scrie:

$$S_1 = 1 + \frac{1+3}{a} + \frac{1+3+5}{a^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{a^n} + \dots$$

Prin descompunere avem:

$$S_1 = \left[1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n} + \dots\right] +$$

$$+ 3\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n} + \dots\right] +$$

$$+ 5\left[\frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^n} + \dots\right]$$

$$+ \dots + (2n+1)\left[\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n+1}} + \dots\right] + \dots$$

Efectuând sumele din paranteze și observând că aceste sume constitue la rândul lor o nouă serie obținem, având în vedere suma seriei generale din (1):

$$S_1 = \frac{(a+1)\,a^2}{(a-1)^3}$$

Din această categorie fac parte o mulțime de serii asupra cărora voi mai reveni.

STOENESCU AL. I.
cl. VI R. lic. Cantemir Buc.

O teoremă. Să se demonstreze că, într'o progresie geometrică de $2n$ *termeni, diferența între cei doi termeni extremi, este totdeauna de cel puțin* $(2n-1)$ *ori mai mare ca diferența dintre cei doi termeni din mijloc.*

Fie:

$$\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots : aq^{2n-1}$$

acea progresie unde:

$$aq^n \quad \text{și} \quad aq^{n-1}$$

sunt termenii din mijloc. Conform enunțului trebue să arătăm că:

$$aq^{2n-1} - a \geqq (2n-1)\,[aq^n - aq^{n-1}]$$

sau:

$$q^{2n-1} - 1 \geqq (2n-1)\,q^{n-1}\,(q-1)$$

Impărțind cu $(q-1)$ avem:

$$q^{2n-2} + q^{2n-3} + \ldots + q + 1 \geqq (2n-1)\,q^{n-1}$$

Dar cum *media aritmetică* a mai multor cantități e mai mare ca *media geometrică*, urmează că:

$$\frac{q^{2n-2}+q^{2n-3}+\ldots+q+1}{2n-1} \geqq \sqrt[2n-1]{q^{2n-2}\cdot q^{2n-3}\ldots q.1} \geqq q^{n-1}$$

c. c. e. d. d.

LT. I. LINTES

Asupra unei relații trigonometrice. In nota d-lui *D. Popescu* din R. M. T., No. 8. D-sa face o oarecare analogie între niște formule trigonometrice, analogie ce se poate stabili mai ușor pe calea următoare;

1. Se cunoaște relațiunea:

$$\frac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} + \frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B} + \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} + 1$$

ce există când $A + B + C = \pi$, deci în particular această relație este satisfăcută și pentru unghiurile:

$$A_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \quad B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \quad C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

a căror sumă este π. Inlocuind în relația noastră și ținând seamă că:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{A}{2};\ \text{etc.}$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{A}{2};\ \text{etc.}$$

obținem relația ce ne-am propus a găsi:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{A}{2}} = 1.$$

2. La fel putem stabili și alte noi relații. Așa pornind dela:

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$$

obținem:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 2$$

3. Din relația:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \qquad (1)$$

scoatem :

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=$$

$$=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

4. După relația (1) scoatem :

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}=\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B+$$

$$+\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}C\operatorname{cotg}A=1$$

sau mai departe :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1.$$

Relațiunile ce se pot scoate din altele pe calea aceasta sunt multe și variate. Mă opresc aci, voind numai a arăta una din căi, pentru stabiliri de noi relații.

N. GEORGESCU-ROEGEN
cl. VI lic. mil. M-rea Dealu.

PROBLEME PROPUSE

122. — Există numere care să fie egale cu produsul cifrelor lor ?

IOAN B. FLORESCU

123. — Dacă p este un număr prim, să se arate că expresiunea :

$$E=1.2.3....(p-1)p+2(1+2+3+...+p)$$

este divizibilă prin p^2.

M. I. ȘERBANESCU

124. — Să se stabilească identitatea :

$$(xy-z)(yz-x)(xz-y)+\Sigma xy(z+1)^2(xy-z)=$$
$$4xyz(x+1)(y+1)(z+1)$$

V. ALACI

125. — Să se rezolve sistemul

$$x^2-c^2y^2=1$$
$$\alpha x^2+c^2yz=0$$
$$\alpha^2x^2-c^2z^2+c^2=0.$$

Ce condiție trebue să îndeplinească α și c pentru ca soluția să fie reală.

TH. ȘNGHELUTA.

126. — Să se rezolve ecuația trigonometrică următoare :

$$\sin^2 2x=\sin^2 x+\sin x.$$

PUIU JUSTER

127. — Să se rezolve ecuația următoare :

$$\operatorname{cotg}x-2\sin^2 x=0.$$

A. T. NICOLAU

128. — Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare există relațiunea

$$\Sigma\sin 2A\sin 2B+2\Sigma\sin^2 A=4\Sigma\sin^2 A\sin^2 B.$$

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

128. — Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare, avem relațiunea :

$$\frac{4}{3}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=r^2\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}\frac{1}{h_c^2}\right)4p^2$$

unde m_a, m_b, m_c ; h_a, h_b, h_c ; p ; r, sunt medianele, înălțimele corespunzătoare laturilor a, b. c, semiperimetru și raza cercului înscris.

EM. BERCOVICI

129. — Să se indice toate operațiunile grafice, în ordinea lor succesivă, care trebuesc făcute, pentru a construi pe hârtie, numai cu rigla și compasul (fără echer) un triunghiu care să aibă înălțimea astfel, încât lungimea ei să fie de două ori mai mare, ca segmentul cel mai mare, pe care piciorul ei îl determină pe lungimea dată a bazei și astfel încât cele două segmente ale bazei să fie așa, ca diferența patratelor lor să fie egală cu patratul unei drepte date.

M. VASILIU

INFORMATIUNI

In *Monitorul Oficial* No. 19, din 28 Aprilie, se găsesc publicate catedrele vacante la Şcoala Politechnică din Timişoara:

1) Fizica generală,
2) Mecanica,
3) Geometria descriptivă şi construcţii civile,
4) Electrotechnica generală,
5) Rezistenţa materialelor,
6) Termodinamica şi fizica industrială,
7) Organe de maşini,
8) Topografia şi geodezia,
9) Mineralogia şi Geologia,
10) Technologia mecanică.

Potrivit art. 25 din decretul-lege privitor la înfiinţarea şi organizarea şcolilor politechnice din România, publicat în *Monitorul Oficial*, No. 61, din 19 Iunie 1920, domnii candidaţi, doritori de a ocupa aceste catedre şi care se găsesc în condiţiunile prevăzute de acel decret lege, vor adresa în termen de două luni dela data prezentei publicaţiuni, cererile lor direcţiunii Şcolii Politechnice din Timişoara, însoţite de un memoriu arătând titlurile, lucrările şi activitatea technică şi ştiinţifică desfăşurată pe baza cărora solicită catedra.

——

Clădirea primului pavilion al Şcoalei Politechnice din Timişoara va începe în vara aceasta. In acest scop s'au întocmit planurile necesare care au fost supuse Consiliului Technic superior pentru aprobare. Lucrările acestui pavilion se ridică la suma de două milioane de lei.

Pentru alcătuirea planurilor s'au cerut concursul profesorului A. Rüster dela Charlottenburg şi al profesorului Arh. Krauss dela Viena care au întocmit planuri pentru clădire. Intârzierea se datoreşte faptului că faţada clădirii trebuind să fie în stil românesc, proectele trebuesc completate şi revăzute.

Pavilionul cu care se începe clădirea nu este de cât o parte mică din complexul general de clădiri care vor alcătui viitoarea şcoală politechnică şi care nu se pot efectua de cât în o serie de ani de lucru.

——

Corespondenţii noştrii care îşi schimbă adresa, snnt rugaţi să comunice schimbarea din vreme pentru a se face corecturile la expediţie, de oarece nu vom mai putea trimete din nou numerile ce le lipsesc.

——

Domnii colaboratori sunt rugaţi când trimit manuscrisele pentru Revista noastră, să timbreze corespondenţa conform taxelor în vigoare, de oarece la un număr prea mare de scrisori în neregulă, neputând plăti o sumă mare, suntem nevoiţi a le retrimite înapoi.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMISOARA.

ANUL II. 15 IUNIE 1922 No. 4

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. PETRE SERGESCU O CLASA DE PROBLEME DIN TEORIA ECUATIILOR ALGEBRICE
2. PROBLEME REZOLVATE.
3. V. C. VICOVEANU RECREATIUNI MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. NOTE MATEMATICE.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1922

Avem plăcerea a a anunța corespondenților noștri că dela 1 Mai 1922, fac parte din comitetul Revistei Matematice din Timișoara și d-nii:

Mihály Elemer, profesor la liceul din Deva.
Manughevici C., inginer chimist, șef de lucrări la Școala Politechnică Timișoara.
Stoicescu M. G., profesor la liceul din Brașov.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **Ing. M. Vasiliu** sub-directorul Fabricei de Tutun, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL II. — NO. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1922

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Inginer M. VASILIU, Fabrica de Tutun, Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

O CLASA DE PROBLEME DIN TEORIA ECUAȚIILOR ALGEBRICE

de PETRE SERGESCU
profesor la liceul Traian

Fie două polinoame de x cu coeficenții reali, U și V, prime între ele, de grade n și $n-1$ respectiv. Ecuația

$$U^2+V^2=0$$

nu are nici o rădăcină reală. In adevăr, pentru orice valoare reală a lui x, U și V au valori reale și deci $U^2 \geqq 0$, $V^2 \geqq 0$. Singurul caz când ecuația ar avea rădăcina reală a ar fi când $U(a)=V(a)=0$. Dar atunci polinoamele U și V ar avea factorul comun $x-a$, ceiace e contra ipotezei. Deci, toate rădăcinile ecuației $U^2+V^2=0$ sunt imaginare.

Observare. Dacă ecuația $U^2+V^2=0$ *admite rădăcina* $\alpha+i\beta$, *ea admite și rădăcina* $\alpha-i\beta$ *la acelaș grad de multiplicitate.*

In adevăr:

$$U^2+V^2=(U+iV)(U-iV).$$

Presupunem că $U^2+V^2=0$ are rădăcina $\alpha+i\beta$, multiplă de ordinul m. $\alpha+i\beta$ trebue să fie rădăcină multiplă de ordinul m pentru una din ecuațiile $U+iV=0$ sau $U-iV=0$. (Cele două ecuații nu pot avea nici o rădăcină comună, căci ar rezulta că U și V nu sunt primi între ei, contra ipotezei). Dacă presupunem că $\alpha+i\beta$ e rădăcină multiplă de ordinul m pentru $U+iV=0$, avem:

$$U+iV=(x-\alpha-i\beta)^m(P+iQ).$$

Dar atunci evident că:

$$U-iV=(x-\alpha+i\beta)^m(P-iQ)$$

ceiace arată ca $\alpha-i\beta$ e rădăcină multiplă de ordinul m al ecuației $U^2+V^2=0$. c. c. t. d.

Problema I. Să se găsească polinoamele U *și* V, *prime între ele, de grade 2 și 1, astfel ca expresiunea* U^2+V^2 *să fie un patrat perfect.*

Ecuația $U^2+V^2=0$ e de gradul 4, deci are patru rădăcini. Expresia $U^2+V^2=0$ fiind un patrat perfect, cele patru rădăcini trebue să formeze două rădăcini duble. Aceste rădăcini sunt conjugate între ele, în baza observației. Deci $U+iV=0$ trebue să aibă o rădăcină dublă $(p+iq)$. Cum această ecuație e de gradul 2 prin ipoteză, ea se reduce la:

$$U+iV=A(x+p+qi)^2=0.$$

Egalând respectiv partea reală și coeficenții lui i în cei doi membrii, obținem:

$$U=A[(x+p)^2-q^2], \quad V=2Aq(x+p)$$

Aci p și q sunt două constante arbitrare. Expresiile obținute formează soluția generală a problemei propuse.

Problema II. E posibil să se găsească două polinoame U *și* V, *prime între ele, de grade* n *și* $n-1$, *astfel ca expresia* U^2+V^2 *să fie un patrat perfect?*

Din moment ce U^2+V^2 e un patrat perfect, ecuația $U^2+V^2=0$ are numai rădăcini duble, deci numai n rădăcini distincte. Să împărțim aceste n rădăcini în două grupe: în grupa I vom pune pe toate cele în care coeficentul lui i e pozitiv, iar în grupa II pe cele în care coeficentul lui i e negativ. In baza observațiunei făcute, la fiecare rădăcină din grupa I, corespunde o rădăcină imaginară conjugată, care e din grupa II; iar la fiecare rădăcină din grupa II corespunde o rădăcină imaginară conjugată în grupa I. Deci cele două

grupe au acelaș număr de rădăcini. Acest lucru nu e posibil decât dacă n e par ($=2m$). Deci:

Teoremă. Dându-se două polinoame prime între ele, U *și* V, *de grade* n *și* $n-1$, *suma* U^2+V^2 *nu poate fi patrat perfect decât dacă* n *e par.*

Dacă n e par ($=2m$) se pot găsi polinoame U și V astfel ca U^2+V^2 să fie patrat perfect. Alegem $m=\frac{n}{2}$ numere imaginare arbitrare: $a_1+ib_1, \ldots a_m+ib_m$ și punem:

$$U+iV=(x-a_1-ib_1)^2 \ldots . (x-a_m-ib_m)^2.$$

Egalând în cei doi membrii respectiv partea reală și apoi coeficenții lui i, obținem expresiunile generale ale soluțiunei U și V. E evident că, în general, cele două polinoame sunt prime între ele, căci a și b sunt constante arbitrare.

Generalizare. Problema III. Să se găsească condiția necesară și suficientă ca două polinoame prime între ele, U *și* V, *de grade* n *și* $n-1$ *să fie astfel încât* U^2+V^2 *să fie o putere a* p^a *exactă.*

Raționameotul e absolut identic ca la problema II. Expresia U^2+V^2 fiind o putere a p^a exactă, ecuația $U^2+V^2=0$ are numai rădăcini multiple de ordinul p. Ca atare, ea are $\frac{2n}{p}$ rădăcini distincte. Pe aceste rădăcini trebue să le putem grupa ca în problema II, în două grupe care conțin același număr de rădăcini. Deci numărul $\frac{2n}{p}$ trebue să se poată împărți exact cu 2. Cu alte cuvinte $\frac{n}{p}$ trebue să fie un întreg m. Pentruca suma U^2+V^2 să fie o putere a p^a exactă, unde U și V sunt polinoame prime între ele de grade n și $n-1$ respectiv, e necesar ca n să fie multiplu de p.

Condiția aceasta e și suficientă. In adevăr când $\frac{n}{p}=m$ e întreg, putem găsi polinoamele U și V în condițiunile voite: Alegem în mod arbitrar m cantități imaginare $a_1+ib_1, \ldots . a_m+ib_m$ și facem:

$$U+iV=(x-a_1-ib_1)^p \ldots . (x-a_m-ib_m)^p$$

Egalând termenii reali în cei doi membrii, obținem pentru U un polinom de gradul n; iar egalând coeficenții lui i, obținem pentru V un polinom de gradul $n-1$. Ele sunt prime între ele, în general, căci cele $2m$ constante a și b sunt arbitrare.

Aplicație. Să se găsească polinoamele U și V prime între ele, de grade 3 și 2 respectiv, așa ca expresía U^2+V^2 să fie un cub perfect.

Avem: $n=3$, $p=3$. Aplicând procedeul indicat, obținem:

$$U=[(x+p)^2-3q^2](x+p)$$
$$V=q[3(x+p)^2-q^2].$$

unde p și q sunt constante arbitrare.

Problema IV. Să se găseassă polinoamele prime între ele U *și* V, *de grade 2 și 3 respectiv, astfel ca ecuația* $U^2+V^2=0$ *să aibă o rădăcină dublă.*

In baza *observațiunei*, și rădăcina conjugată e dublă. Ecuația $U+iV=0$ trebue să aibă o rădăcină dublă. Cum $U+iV$ e, prin ipoteză, un polinom de gradul al treilea, suntem conduși la:

$$U+iV=A(x+p+iq)^2(x+l+mi)$$

(Evident că putem presupune $A=1$, fără a micșora generalitatea).

Cantitățile p, q, l, m sunt constante arbitrare. Egalând partea reală în cei doi membrii și apoi egalând coeficenții lui i obținem soluția generală:

$$U=[(x+p)^2-q^2](x+l)-2qm(x+p)$$
$$V=[(x+p)^2-q^2]m+2q(x+l)^2.$$

Problemă generală. Să se găsească două polinoame U *și* V, *prime între ele, respectiv de gradele* n *și* $n-1$ *astfel ca ecuația* $U^2+V^2=0$ *să admită cantitatea* $-p-qi$, *ca rădăcină multiplă de ordinul* a.

Ecuația admite și $-p+iq$ rădăcină multiplă de ordinul a. Cantitatea $-p-qi$ e rădăcină de ordinul a a ecuației $U+iV=0$ sau $U-iV$. Pentru fixarea ideilor, să presupunem că e acelei dintâi ecuații ceiace, de altfel, nu restrânge generalitatea soluției. Dar atunci:

$$U+iV=(x+p+qi)^a[P_{n-a}+iQ_{n-a-1}]$$

unde P_{n-a} și Q_{n-a-1} *sunt polinoame arbitrare*, respectiv de gradele $n-a$ și $n-a-1$. (Ele sunt alese de gradele indicate, pentru ca U și V să fie de gradele n si $n-1$). Egalând între ei respectiv părțile reale și coeficenții lui i din cei doi membrii, se deduce soluția generală:

$$U = P_{n-a}[(x+p)^a - C_a^2((x+p)^{a-2}q^2 + + C_a^4(x+p)^{a-4}q^4 \ldots .]$$

$$+ Q_{n-a-1}[C_a^1(x+p)^{a-1}q - C_a^3(x+p)^{a-3}q^3 + \ldots]$$

$$V = Q_{n-a-1}[(x+p)^a - C_a^2(x+p)^{a-2}q^2 + + C_a^4(x+p)^{a-4}q^4 \ldots .]$$

$$+ P_{n-a}[C_a^1(x+p)^{a-1}q - C_a^3(x+p)^{a-3}q^2 + \ldots].$$

PROBLEME REZOLVATE

25. — *Un aeroplan pleacă la ora 14 din București spre Timișoara, cu o viteză de 150 km. pe oră. După o oră, pleacă din București, în aceiași direcțiune un tren accelerat cu o viteză de 60 km. pe oră. Un tren express, pleacă din Timișoara spre București cu o viteză de 75 km. pe oră, întâlnește aeroplanul după 3 ore de mers și acceleratul după încă o oră. La ce oră trenul express a plecat din Timișoara?*

M. VASILIU

Soluțiune dată de d. Prof. *Para Dionisie-Cernăuți.*

Intre întâlnirea expresului cu aeroplanul și a acceleratului cu expressul, fiind o oră sau 60′, rezultă că în momentul primei întâlniri, distanța, care separă aeroplanul de accelerat era

$$\left(\frac{75}{60}+\frac{60}{60}\right)60 = 135 \text{ km.}$$

adică suma distanțelor făcute de express și de accelerat în intervalul de 60′.

Dar, când acceleratul pleacă, aeroplanul în timpul avansului de o oră, a făcut deja 150 kilometri, căci aceasta este viteza lui, și prin urmare, a întrecut distanța de 135 km. dintre ei, la întâlnirea întâia.

Deci, prima întâlnire a avut loc, atuncea când acceleratul nici nu era plecat, adică după $\frac{135}{150} = \frac{9}{10}$ ore $= 54'$ dela plecarea aeroplanului sau la ora 14,54 și cum această întâlnire, are loc după trei ore de mers a expressului, urmează că acesta a plecat din Timișoara la ora $11^h,54'$.

Au rezolvat bine problema d-nii:
Miulescu Nicolae, Miclescu B. Andrei și *Ioan M. Ioniță* Șc. Militară de Artilerie Timișoara.
Mircea Popescu student.

Din cl. VIII liceală d-nii: *Cazacincu Th.* liceul „Laurian" Botoșani, *Octav Ulmeanu, V. Antistescu* și *M. Gh. Săvescu* lic. „Internat" Iași, *Nicolau Alexandru* „Cantemir-Vodă" București, *Cristea Goilav* cl. VIII particular Tecuci, *Asnaș Solomon* Călărași.

Din clasa VII liceală d-nii: *Petre D. Dimitriu* Galați, *Ioan Teodorescu* Ploești, *Dili C. Schileru, Georgescu I. Const, Nicu D. Mucichescu, Ioan B. Florescu Const. Biernasche* și *M. Gâtan* Craiova, *Petrescu Cernea* „M-rea Dealul", *T. Georgescu* Ploești, *Pincu Katz* Galați și *Nicuță Theodoru* Huși, *Georgescu N. Ioan* Constanța.

Din clasa VI liceală d-nii: *Constantinescu Ion* „M-rea Dealul", *Florian Er. Georgescu* „Cantemir-Vodă" București, *Tiberiu Popoviciu* „Moise Nicoară" Arad, *Școdreanu Alexandru* „Durostor" Silistra, *Tenea M. Ioan* Caracal, *Bogdan P. Martinean, Ioan I. Reșcanu, Ionescu I. Ilie, Ristea N. Marin* și *Dobrescu M. Filip* liceul din Caracal, *Georgescu N. Teodor* Ploești, *N. Georgescu-Roegen* Constanța, *Iosif I. Ioan* Constanța, *Florea Negretzu* Pitești, *I. Șerbănescu* „Mihai-Viteazul" București, *Octavian Smigelschi* Sibiu.

Din cl. V liceală d-nii: *Ioneseu I. Nicolae* Pitești, *Atanasiu Dumitru* „M-rea Dealul", *Aurel T. Dumitriu* București, *Marinescu M. Ioan, Neștianu Gh., Răuț Constantin* și *Bănărescu A. Lucretius* „M-rea Dealul", *Bușilă Adrian* „Mihai-Viteazul" București, *Solomon W.* „Matei Basarab" București.

Precum și d-nii: *Berdan I. Constantin* „Codreanu" Bârlad, *Alexandru Mitulescu, Avereanu Petre* Galați, *Ioan Țibuleac* Hârlău, *Nicu Părăianu* Pitești. *N. Păsculescu* Craiova.

S'au mai primit și câteva soluțiuni neiscălite.

32. — *Fiind date pe dreapta* D *punctele* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *să se găsească pe aceiași dreaptă punctele echidistante* $M_1, M_2, \ldots, M_n$, *adică*

$$M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}M_n,$$

astfel ca expresiunea

$$\overline{M_1A_1}^2 + \ldots + \overline{M_nA_n}^2$$

să fie un minimum.

N. ABRAMESCU

Să ia pe dreapta D punctul fix O ca origină și

să însemnăm cu $OA_i = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vom distinge două cazuri, n cu soț și n fără soț.

1°. $n = 2p$ și să notăm cu

$$M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}M_n = 2h,$$

$$OM_p = x - h,\ OM_{p+1} = x + h.$$

Avem

$$OM_p = x - h,\ OM_{p-1} = x - 3h,$$

$$OM_{p-2} = x - 5h, \ldots, OM_1 = x - (2p-1)h,$$

$$OM_{p+1} = x + h,\ OM_{p+1} = x + 3h,$$

$$OM_{p+2} = x + 5h, \ldots, OM_{2p} = x + (2p-1)h;$$

$$d^2 = \overline{M_1A_1}^2 + \overline{M_2A_2}^2 + \ldots + \overline{M_pA_p}^2 + \overline{M_{p+1}A_{p+1}}^2 + \ldots + \overline{M_{2p}A_{2p}}^2,$$

$$d^2 = (\overline{M_1A_1}^2 + \overline{M_{2p}A_{2p}}^2) + \ldots + (\overline{M_pA_p}^2 + \overline{M_{q+1}A_{p+2}}^2),$$

$$d^2 = [a_1 - x + (2p-1)h]^2 + [a_{2p} - x + (2p-1)h]^2 + \ldots + (a_p - x + h)^2 + (a_{p+1} - x - h)^2,$$

$$d^2 = (x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_{2p})^2 + 2h(2p-1)(a_1 - x) + 2h(2p-1)(a_{2p} - x) + \ldots + 2h^2[(2p-1)^2 + (2p-3)^2 + \ldots + 3^2 + 1^2],$$

$$d^2 = nx^2 + \Sigma a_1^2 - 2x\Sigma a_1 + 2h[(2p-1)a_1 + (2p-3)a_2 + \ldots + a_p - a_{p+1} - \ldots - (2p-1)a_{2p}] + 2h^2[1^2 + 3^2 + \ldots + (2p-1)^2],$$

$$d^2 = n\left[x - \frac{\Sigma a_1}{n}\right]^2 - \frac{(\Sigma a_1)^2}{n} + \frac{\Sigma a_1^2}{n} + 2[1^2 + 3^2 + \ldots + (2p-1)^2] \times \left[h^2 + \frac{(2p-1)a_1 + \ldots + a_p - a_{p-1} - \ldots - (2p-1)a_{2p}}{1^2 + 3^2 + \ldots + (2p-1)^2}h\right]^2$$

$$d^2 = n\left(x - \frac{\Sigma a_1}{n}\right)^2 - \frac{(\Sigma a_1)^2 - \Sigma a_1^2}{n} + 2[1^2 + 3^2 + \ldots + (2p-1)^2]\left[h + \frac{(2p-1)a_1 + \ldots + a_p - a_{p+1} - \ldots - (2p-1)a_{2p}}{2[1^2 + 3^2 + \ldots + (2p-1)^2]}h\right] - \left[\frac{(2p-1)a_1 + \ldots + a_p - a_{p+1} - \ldots - (2p-1)a_{2p}}{2[1^2 + 3^2 + \ldots + (2p-1)^2]}\right]^2$$

Expresiuuea lui d^2 conține două patrate variabile cu h și x. Deci d^2 va fi un minimum când aceste patrate sunt nule, adică

$$x = \frac{\Sigma a_1}{n},$$

$$h = \frac{(2p-1)a_{2p} + \ldots + a_{p+1} - \ldots - (2p-1)a_1}{1^2 + 3^2 + \ldots + (2p-1)^2}$$

astfel că pozițiile punctelor $M_1, \ldots, M_{2p}$ sunt determinate.

2°. $n = 2q + 1$. Punem

$$OM_{q+1} = x,\ M_1M_2 = \ldots = M_{1q}M_{2q+1} = h;$$

necuuoscutele sunt x și h și chestiunea se rezolvă la fel.

A dat soluție bună d-l *Constantin Biernaschi* elev liceul militar Craiova.

73. *Să se construiască un triunghiu* ABC *cunoscându-se unghiurile, o dreaptă* AA', *ce pleacă din vârful* A *și intersecțiile acesteia cu bisectoarea unghiului* B *și latura* BC.

MIRON NICULESCU.

Soluție dată de d-nii: *L. Bănărescu, V. Dan, M. Focșeneanu, Fl. Georgescu, C. Georgescu, A. Miclescu, W. Negoescu, E. Pavlu, Al. Școdreanu, A. T. Nicolau.*

Insemnăm cu D și A intersecțiile dreptei date cu bisectoarea unghiului B, cu latura BC. Descriem pe dreptele DA și DA' câte un segment de cerc capabil de unghiul $\frac{B}{2}$; punctul lor de intersecție este vârful B. Construim în A cu latura AB unghiul BAC egal cu unghiul dat A și în punctul B unghiul DBC egal cu $\frac{B}{2}$; dreptele astfel construite se tae în vârful C. Triunghiul ABC este cel cerut.

82. — *Intr'un triunghiu* ABC *se descrie din* A *ca centru cu* AB *ca rază un cerc care tae latura* AC *în* D, BC *în* E. *Cercul circumscris triunghiului* ADE *tae din nou latura* BC *în punctul* F. *In ipoteza* BC *fixă și constantă, unghiul* A *constant, să se arate că* AF *trece printr'un punct fix.*

A. NICOLAU

Soluție dată de d-nii: *N. Georgescu-Roegen, N. Pârâianu, Al. Școdreanu, O. Ulmeanu,*

Avem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AEC$, căci $AB = AE$; dar $\sphericalangle FAD = \sphericalangle CEA$, căci patrulaterul AFDE este inscriptibil. Deci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADF$. Cum $AB = AD$, rezultă că AF este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Deci va trece necontenit prin mijlocul I mijlocul arcului BC, când coarda BC e fixă și de lungime constantă, iar A fiind fix este mobil pe cercul circumscris triunghiului ABC.

83. — *Printr'un punct* D *așezat în interiorul unui unghiu dat* aOb, *să se ducă o dreaptă care să tae laturile* aO, bO *și bisectoarea interioară a unghiului* aOb *respectiv în punctele* A, B, C, *astfel încât să avem* $DA = CB$.

N. ABRAMESCU

Soluție dată de d-nii: *N. Dospinoiu, M. Grünbaum, P. Juster, Gr. Livadă, A. Nicolau, N. Pârâianu, O. Popea.*

Presupunem problema rezolvată și fie ACDB dreapta cerută (D între bisectoarea interioară OC și latura Ob). Se vede că dacă $AD = BC$, rezultă și $AC = BD$. Fie E și F punctele de intersecție ale dreptelor Ob și Oa cu paralela din D la OC. Din asemănarea triunghiurilor BED, BOC, rezultă

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DE}{CO};$$

din asemănarea triunghiurilor AOC, AFD, avem

$$\frac{AC}{AD} = \frac{OC}{FD}.$$

Dar

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AC}{AD};$$

deci

$$\frac{DE}{OC} = \frac{OC}{FD}, \quad \overline{OC}^2 = DE.DF.$$

Punctele E și F fiind cunoscute, pentru a afla pe C, construim lungimea OC, media proporțională între lungimile DE, DF. Dreapta DC este cea căutată.

Observare. Generalizarea acestei probleme a fost propusă de același autor în *Gazeta Matematică* și este rezolvată în vol. XXVII, p. 58.

85. — *Să se arate că expresiunea*

$$(x+1)^{12} + (x+1)^2 + (x+1)$$

este divizibilă cu $x^2 + 3x + 3$. *Să se găsească câtul împărțirei.*

TR. LALESCU.

1°. Soluție dată de d-l *Andrei Mitlescu* Școala Militară de Artilerie Timișoara.

Fie $P = (x+1)^{12} + (x+1)^2 + (x+1)$ și

$$E = x^2 + 3x + 3 = (x+1)^2 + (x+1) + 1.$$

Atunci

$$P = E + (x+1)^{12} - 1 =$$
$$= E + [(x+1)^6 + 1][(x+1)^6 - 1] =$$
$$= E + [(x+1)^6 + 1][(x+1)^3 + 1][(x+1)^3 - 1]$$
$$= E + x[(x+1)^6 + 1][(x+1)^3 + 1](x^2 + 3x + 3)$$

și dar

$$P = E\left\{1 + x[(x+1)^6 + 1][(x+1)^3 + 1)]\right\}$$

de unde să vede că P este divizibil cu E, iar câtul acestei împărțiri este

$$1 + x[(x+1)^6 + 1][(x+1)^3 + 1]$$

2°. Soluție dată de d-l *A. T. Nicolau* student București.

Împărțitorul să mai poate scrie

$$(x+1)^2 + (x+1) + 1 = y^2 + y + 1$$

punând $y = x + 1$ și atunci câtul polinoamelor considerate, devine:

$$\frac{y(y^{11} + y + 1)}{y^2 + y + 1} = \frac{y(y^{11} - y^2 + y^2 + y + 1)}{y^2 + y + 1} =$$
$$= y + \frac{y^3(y^9 - 1)(y - 1)}{y^3 - 1}$$
$$= y + y^3(y - 1)(y^6 + y^3 + 1)$$

și dar acest cât căutat, va fi ca mai sus

$$(x+1)^{10} - (x+1)^9 + (x+1)^7 - (x+1)^6 +$$
$$+ (x+1)^4 - (x+1)^3 + (x+1)$$

sau făcând calculele după binomul lui Newton:

$$x^{10} + 9x^9 + 36x^8 + 85x^7 + 132x^6 + 141x^5 +$$
$$+ 105x^4 + 54x^3 + 18x^2 + 4x + 1$$

care este expresiunea desvoltată a câtului.

3°. Soluție dată de d-l *Mircea St. Popescu* student.

Desvoltând după binomul lui Newton expresiunea dată $(x+1)^{12}+(x+1)^2+(x+1)$ căpătăm:

$$x^{12}+12x^{11}+66x^{10}+220x^9+495x^8+792x^7+$$
$$+924x^6+792x^5+495x^4+220x^3+67x^2+15x+3$$

pe care împărțind'o cu x^2+3x+3, găsim tocmai câtul din soluția doua.

Prin una din soluțiile de mai sus, au rezolvat problema foarte bine și d-nii:

N. Dospinoiu conductor de lucrări publice, *Robert Glasberg* student architectură București, *Cristea P. Goilav* student matematici București, *I. N. Georgescu-Val* Școala Militară de Artilerie Timișoara.

Din clasa VIII liceală următorii d-ni:

M. Gh. Săvescu, Em. V. Soceanu, Ulmeanu Octav și *Antistescu V.* lic. „Internat" Iași, *Solomon Asnaș* Călărași, *Stoenescu I. Alexandru* București și *I. E. Rădulescu* Ploești.

Din clasa VII liceală următorii d-ni:

Samovici Isidor Focșani. *B. Gh. Mărculescu* lic. „Lazăr" București, *Dili C. Schileru* și *Stănescu A. Nicu* Craiova, *Jean Propst* T.-Severin, *Const. E. Georgescu* lic. „Cantemir-Vodă" București, *Ioan I. Iliescu* lic. „Alexandri" Galați și *Georgescu N. Ioan* Constanța.

Din clasa VI liceală următorii d-ni:

Bușilă A. Adrian „Mihai-Viteazul" București, *Iordăchescu N. Nistor* Pitești, *Valeriu I. Stamatescu* București, *Popescu N. Ștefan* Pitești, *Const. Berdan* Bârlad, *Ristea N. Marin, Ciolacu Miron, Ascadian P. Nicolae, Amărăscu O. Gavril, Ionescu Ilie, Dobrescu M. Filip, Brătășanu Al. George, Țenea N. Ioan, Ioan I. Reșceanu* și *Bogdan Martinian* toți dela lic. „Ioan Assan" din Caracal, *Georgescu Er. Florian* „Cantemir-Vodă" București, *E. Iliescu* Târgoviște, *M. I. Șerbănescu* „Mihai-Viteazul" București, *Alex. Tauber* Botoșani, *Tiberiu Popoviciu* lic. „Moise Nicoară" Arad, *Alexandru Pamula* Botoșani, *Ștefan Musta* „Diaconovici-Loga" Timișoara, *Samoilă Dumitru* Câmpina, *Popa I. Teodor* „Spiru-Haret". București, *Ghițescu Virgiliu* „Mihai-Viteazul" București, *Florea I. Negretzu* Pitești și *Emil Ștefănescu* „Spiru-Haret" București.

Din clasa V liceală următorii d-ni:

Vasilache Sergiu, Marinescu M. Ioan, Livada Gr., Atanasiu I. Dumitru, Bănărescu A. Lucretius, Nestianu Gheorghe și *Boneu Ion* toți dela liceul militar „M-rea Dealul" Târgoviște, *Marinescu I. Aristide* lic. Caracal, *Solomon Wilhelm* „Matei-Basarab" București, *Dumitrescu G. Marin* Craiova, *Maximilian Grünfeld* Brăila.

Precum și d-nii:

Adalbert Kanner, Ursescu D. Gh. Ploești, *Ion Coșereanu* P.-Neamț, *Gh. Stancu* Focșani, *Prundeanu Ilie* Caracal, *Iulian M. Nicolau* Pitești, *Melinte Gh, Puiu Juster* P.-Neamț, *Nicu Pârâianu* Pitești, *Nicuță Teodoru*. S'au mai primit încă câteva soluții neiscălite. D-l conductor *N. Dospinoiu* a considerat cazul mai general, când expresiunea dată ar fi y^m+y+1 și a studiat condițiile de divizibilitate, prin y^2+y+1 ce trebuesc îndeplinite de m deducând că în acelaș mod, să poate arăta că

$$(x+1)^n+(x+1)^2+(x+1)$$

este divizibilă cu x^2+3x+3 când $x=\text{M.}3$.

93. — *Notațiunile fiind cele obicinuite, să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relația:*

$$\sum\frac{(ha-2r)(r_a-r)}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=2s$$

CRISTEA GOILAV

In virtutea relațiunilor cunoscute,

$$h_a=\frac{2pr}{a},\quad r_a=\frac{pr}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$

membrul întâi al relațiunei cerute devine:

$$\sum\frac{\left(\frac{2pr}{a}-2r\right)\left(\frac{pr}{p-a}-r\right)}{\frac{r}{p-a}}=$$

$$=2r\sum(p-a)=2r(p-a+p-b+p-c)$$
$$=2pr=2s.$$

Relațiunea cerută este astfel stabilită.

Observare. D-l *Dili C. Schileru* a stabilit și alte relațiuni analoage, printre care și:

$$\sum\frac{(h_a-2r_a)(r_a-r)}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=2p(5r-4R)$$

Soluție dată de d-nii: *Antoniu I., Bercovici E., Berdan C., Brăileanu A., Bușilă A., Callego M., Cazanacli P., Cocorandu M., Constantinescu I., Constantinescu M., Dinulescu N., Dordea T., Dragomirescu E., Focșăneanu M., Georgescu C., Georgescu-Roegen, Georgescu Valeriu, Ghițescu V., Gogălniceanu M., Huber I., Iliescu E., Iliescu I., Ionică E., Ioniță, Iorgulescu C., Juster P., Katz P., Mărculescu G., Măru D., Miclescu A., Mocanu A., Negretzu F., Nicolau I., Oprișan E., Părăianu N., Popa T., Popescu S., Popovici T., Propst I., Rigani C., Rizescu I., Rosetel B., Samovici I., Săndulescu C., Săvescu M., Schileru C. Dili, Scodreanu A. Șerbănescu I., Silion I., Socaciu E., Solomon A., Stanciu G., Stănescu N., Ștefănescu E., Stoenescu I. A., Stoenescu I., Sufletel A., Tauber A., Teodorescu T., Teodoru N., Ulmeanu O., Vincențiu G., Florian Gr., Georgescu* și *V. C. Vicoveanu.*

94. — *Să se simplifice expresiunea:*

$$\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{y}-1)+(\sqrt{xy}-1)(xy-1)}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1)+(\sqrt{xy}-1)(xy+1)}$$

V. ALACI

Insemnând cu E expresiunea dată, putem scrie succesiv :

$$E=\frac{xy-y\sqrt{x}-x\sqrt{y}+\sqrt{xy}+xy\sqrt{xy}-xy-\sqrt{xy}+1}{xy+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{xy}+xy\sqrt{xy}-xy+\sqrt{xy}-1}$$

$$=\frac{xy\sqrt{xy}-y\sqrt{x}-x\sqrt{v}+1}{xy\sqrt{xy}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}-1}$$

$$=\frac{y\sqrt{x}\,(x\sqrt{y}-1)-(x\sqrt{y}-1)}{y\sqrt{x}\,(x\sqrt{y}+1)-(x\sqrt{y}+1)}$$

$$=\frac{(x\sqrt{y}-1)\,(y\sqrt{x}-1)}{(x\sqrt{y}+1)\,(y\sqrt{x}-1)}=\frac{x\sqrt{y}-1}{x\sqrt{y}+1}$$

Observare. D-nii *Georgescu-Rôegen*, *Iorgulescu C.* și *Săvescu M.*, au observat că expresiunea de simplificat dată, este membrul întâi al identității (21) din articolul „O clasă de identități algebrice“ din No 1 al Revistei, pag. 6, unde x și y se înlocuesc cu $\sqrt{x}$ și $\sqrt{y}$, obținând soluțiunea prin transformarea unei identități trigonometrice,

Au rezolvat problema d-nii : *Apreutesei I., Angelescu C., Antoniu I., Atanasiu D., Bănărăscu L., Berdea C., Beşliu C., Biernaschi C., Bonea I., Buşilă A. Callega M., Chiorescu C., Ciolacu M., Cocorandu M., Constantinescu I., Crăiniceanu E., Dinulessu N., Dobrescu F., Dordea Tr., Dragomirescu E., Dumitrescu M., Freifeld I., Georgescu G. I., Georgescu E. C., Georgescu I. N., Georgescu-Valeriu, Georgescu Florian, Georgescu-Roegen, Ghiţescu V., Gianni Gr., Gogâlniceanu M., Goilav Cristea, Iliescu E., Iliescu Ion, Ionescu I., Ionescu S., Ioniţă I., Iorgulescu C., Juster P., Katz P., Klein S., Lăzărescu I., Livada Gr., Losner O., Marinescu I., Martianu B., Măru D., Mehlmann, Melinte Gh., Miclescu A., Mitulescu A., Moroianu A., Musta S., Nestianu G., Negretzu F., Nicolau I., Novac H., Novotny E., Pantazi D., Părăianu V., Petrescu C., Popa T., Popescu S., Popescu I., Popovici I., Popovici T., Propst I., Prundeanu I., Răbăgia T., Răuţ C., Risceanu I., Ristea M., Rosetel B., Samovici I., Samoilă D., Săndulescu G., Săvescu M., Schileru C. Dilli, Schonfeld C., Scodreanu A., Silion I.. Socaciu E., Stănescu N., Ştefănescu E., Stoenescu S., Sufletel A., Tauber A., Teodorescu I., Teodoru M., Teodoru N., Trincă M., Tuducescu N., Ţenea N., Ulmeanu O., Ursescu G., Vasilache S., Vincenţiu C., Wechsler A., Zamfirescu I. Joan, B. Ionescu, Alexandru Pamula şi V. C. Vicoveanu.*

95. — *Să se rezolve ecuaţiunea :*

$$x^5-(a+1)x^4+x^3+(a^2+a-1)x^2-(a+1)ax+a=0$$

M. VASILIU

1°. Soluţiune dată de d-l *I. N. Georgescu-Val* Şcoala de artilerie din Timişoara.

Avem succesiv :

$$x^5-ax^4-x^4+x^3+a^2x^2+ax^2-x^2-a^2x-ax+a=0$$

$$x^4(x-1)+x^2(x-1)-ax^2(x^2-1)+$$
$$+a^2x(x-1)-a(x-1)=0$$

$$(x-1)\,[x^4+x^2-ax^2(x+1)+a^2x-a]=$$

$$=(x-1)\,[x^2(x^2-ax+1)-a(x^2-ax+1)]=$$

$$=(x-1)\,(x^2-ax+1)\,(x^2-a)=0.$$

De unde scoatem ecuaţiile parţiale

$$x-1=0$$
$$x^2-ax+1=0$$
$$x^2-a=0$$

care ne dau soluţiunile

$$x_1=1,\ x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\ x_3=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},$$

$$x_4=-\sqrt{a},\ x_5=\sqrt{a}$$

Discuţie. Presupunem $a\geqslant 0$. Atunci pentruca ecuaţia să aibă toate rădăcinile reale, trebue ca

$$a^2-4\geqslant 0 \text{ sau } a\geqslant 2.$$

Dacă $a=2$, avem două rădăcini egale

$$x_2=x_3=\frac{a}{2}=1$$

iar celelalte sunt $x_1=1$, $x_4=-\sqrt{2}$, $x_5=\sqrt{2}$.

Dacă $a<2$ avem 2 rădăcini imaginare x_2 și x_3, iar celelalte trei sunt reale.

Dacă $a<0$, atunci avem imediat două rădăcini imaginare x_4 și x_5 și pentru că celelalte să fie reale, trebue ca

$$a^2-4\geqslant 0 \quad \text{sau} \quad -a\geqslant 2 \quad \text{sau} \quad a\geqslant -2$$

contrar vom avea încă două imaginare pe x_2 și x_3.

2°. Soluţie dată de d l *Cristea P. Goilav* student Bucureşti.

Să observă că membrul întâi al ecuaţiei să divide cu $x-1$ și dar putem scrie :

$$(x-1)\,[x^4-ax^3+a(1-a)\,x^2+a^2x-a]=0$$

care să mai poate scrie și

$$(x-1)\,[x^2(x^2-a)-ax(x^2-a)+(x^2-a)]=0$$

$$\text{sau} \quad (x-1)\,(x^2-a)\,(x^2-ax+1)=0$$

dând aceleași soluţii ca mai sus.

Prin una din aceste căi au rezolvit problema, următorii d-ni: Şcoli speciale: *Muş Orest, Traian Răbăgia, Eugen Crainicescu, Elemer Novotny* şi *Const. G. Beşliu* Studenţi Şcoala Politehnică din Timişoara. *N. Dospinoiu* conductor de lucrări publice, *Andrei Miclescu, Ioan M. Ioniţă, Dragomirescu B. Eduard* şi *Popescu M. Ioan* Şcoala Militară de Artilerie Timişoara.

Din clasa VIII liceală următorii d-ni: *Const. Iorgulescu, E. V. Soceanu, M. Gh. Săvescu* şi *Ulmeanu Octav* liceul Internat Iaşi, *Const. Chiorescu* şi *Iosif Freifeld* Botoşani.

Din Clasa VII liceală au rezolvit următorii d-ni: *Jean Propst*, liceul T.-Severin, *Pincu Katz, Măru Dumitru* şi *Dinulescu N. Nicolae* liceul din Galaţi, *Ernest G. Oprişanu* Bârlad, *Dili C. Schileru* şi *Nicu A. Stănescu* Craiova *Gogălniceanu M. Mihail* Brăila *Virgil C. Vasilescu, I. N. Teodorescu* şi *Nicolescu Is. Isaiia* Ploeşti, *I. Somovici, Nicuţă Theodoru* Huşi *Nicu Pârâiunu* Piteşti, *Const. E. Georgescu* „Cantemir-Vodă" Bucureşti, *Traian A. Dordea* şi *Aurel P. Sufleţelu* liceul militar „M-rea Dealul" Târgovişte şi *Gh. Mărculescu* „Lazăr" Bucureşti.

Din clasa VI liceală au rezolvit problema următorii d-ni: *Ioan B. Ionescu* Galaţi, *I. Musta* „Diaconovici-Loga" Timişoara, *Silion Gh. Ioan* Câmpina, *Lăzărescu T. Ioan. Florea I. Negreţzu, Popescu N. Ştefan* şi *Georgescu C. Ioan* Piteşti, *Bogdan P. Martinian, Ciolacu St. Miron, Dobrescu M. Filip, Ristea N. Marin* şi *Ionescu I. Ilie* liceul „Ioniţă-Assan" Caracal, *Boju Rosetel* „Durostor" Silistra, *Busile Adrian* Bucureşti, *Macri Socrate* Botoşani, *Stoenescu Al. I., Georgescu Er. Florian* „Cantimir-Vodă" Bucureşti. *Ghiţescu Virgiliu, Şerbănescu M. Ioan, Callega M.* şi *Popovici Th. Ioan* „Mihai-Viteazul" Bucureşti, *Ion S. Antoniu, S. Iliescu* „M-rea Dealul" Târgovişte, *Popa I. Teodor* şi *Emil Ştefănescu* „Spiru Haret" Bucureşti, *Tiberiu Popoviciu* şi *Negru C. Petru* „Moise-Nicoară" Arad, *Ursescu D. Gh.* Ploeşti, *Şcodreanu Alexandru* „Durostor" Silistra, *Alexandra Tauber* Botoşani, *Giottoa Vincenţiu* şi *C. Berdan* „Codreanu" Bârlad.

Din clasa V liceală următorii: *Schonfeld C.* Botoşani. *Bănărescu Lucreţiu, Atanasiu I. Dumitru, Vasilache I.* şi *Bonţu Ion* liceul Militar „M-rea Dealul" Târgovişte. Precum şi d-nii *Prundeanu Ilie* Drăgăneşti-Olt, *Iulian M, Nicolau* Piteşti, *M. Cocorandu* liceul din Braşov, *Cr. Rigani* Constanţa, *Vasiliu D. V.* Constanţa, *Gh. Hancu* Focşani, *Solomon I. Asnaş* Călăraşi, *Puiu-Juster* Piatra-Neamţ, *Trincă D. Marin* Caracal, *Al. Brăileanu* Constanţa, *V. C. Vicoveanu.*

RECREATIUNI MATEMATICE

V. C. VICOVEANU

Paradox matematic. Suma unghiurilor unui triunghiu este mai mare decât 180°.

Ca să demonstrăm acest paradox, considerăm două cercuri care să taie în punctele A şi B. Din A ducem diametri în cele două cercuri ce le mai taie încă în punctele C şi D. Unim C cu D şi căpătăm astfel dreapta CD care mai taie cele două cercuri încă în punctele E şi F. Triunghiul AEF care să formează astfel are două din unghiurile sale drepte E şi F ca fiind fiecare înscrise într'un semicerc. Deci suma unghiurilor triunghiului AEF este mai mare ca două unghiuri drepte.

Observare. Eroarea vine de acolo că la prima vedere, nu se observă că dreapta CD trebue să treacă prin punctul B, al doilea punct de intersecţie a celor două cercuri, unde prin urmare să confundă punctele E şi F. In adevăr unind B cu D şi C, dreptele CB, BD vor fi una în prelungirea alteia, pentrucă unghiurile ABD şi ABC sunt adiacente şi au o sumă egală cu două unghiuri drepte.

BIBLIOGRAFIE

Revista de Matematicas y Fisicas Elementales. Ano. III. Abril 1922, Nom. 12 (36). Buenos-Aires. Al treilea an al revistei „de Matematicas y Fisicas Elementales", de Dr. B. Ig. Baidaff. Asupra unor chestiuni de maximă şi minimă, de Dr. B. Ig. Baidaff. Ceva asupra greutăţilor specifice, de B. Garronne. Note, Probleme rezolvate, Exerciţii, Probleme propuse, Tabla de Materii.

Pe coperta acestui număr redacţia anunţă că primeşte abonamente pentru „Gazeta Matematică" din Bucureşti şi „Revista Matematică din Timişoara". Reamintim corespondenţilor noştri, cu această ocaziune, că se pot abona la „Revista de Matematicas y Fisicas Elementales" din Buenos-Aires, trimiţând 40 lei la Redacţia „Gazetei Matematice" din Bucureşti, care le va elibera o chitanţă, ce urmează a fi trimeasă împreună cu adresa exactă, d-lui *Dr. B. Ig. Baidaff. (Calle Peru 147. IX) Buenos-Aires.*

*

Gazeta Matematică. An. XXVII, Mai 1922, No. 9, Bucureşti. Asupra metodei aproximaţiilor succesive în geometrie, de P. Sergescu. Asupra unui loc geometric, de Lt.-Col. Gh. Buicliu. Premiul pentru matematici aplicate la chestiuni industriale. Note, Chestiuni de Examen, Cereri, Probleme rezolvate, Exerciţii, Probleme propuse.

LT. GR. Z.

NOTE MATEMATICE

Asupra articolului „Despre ortopol" de d. Ing. *M. Nicolau* (Revista Matematică din Timişoara, vol. I, pag. 147 şi 148).

In acest articol d-nul Inginer *M. Nicolau* dă o demonstraţie elementară şi ingenioasă a teoremei

ortopolului, însoțită de o generalizare a acestei teoreme, enunțată în modul următor:

„Dacă se proiectează sub un unghiu oare-„care $+\delta$ *vârfurile* A, B, C *ale unui triunghiu „oarecare* ABC *pe o dreaptă* Δ *din planul său, „respectiv în punctele* A′, B′, C′ *și dacă apoi „aceste puncte se proiectează și ele sub un-„ghiul* $-\delta$ *respectiv pe laturile* BC, CA, AB *în* „A″, B″, C″, *atunci dreptele* A′A″, B′B″, C′C″ *„concură într'un punct* O".

Acestui punct O, d-l M. Nicolau, prin analogie cu ortopolul, (când proiectantele fac unghiuri drepte), îi dă numele de *isopolul* dreptei Δ în raport cu triunghiul dat ABC și unghiul $+\delta$.

Vreau să arăt că această generalizare este cunoscută și a fost găsită mai înainte de d-l *J. A. Third*, fără să mă gândesc prin aceasta că d-l Ing. M. Nicolau ar fi avut cunoștiință de ea, voind să restabilesc numai o chestie de prioritate.

Iată cum d-l *J. A. Third* într'o Notă intitulată *„Generalization of the Orthopole and allied Theorems"*, publicată în *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, t. XXXI, 1913, pp. 17—34 și reprodusă în parte de d-l *J. Neuberg* în revista belgiană *Mathesis*, année 1914, pp. 89—93, după care iau aceste date, generalizează teorema fundamentală a triunghiurilor ortologice și a ortopolului:

Dacă două triunghiuri ABC, A′B′C′ *sunt astfel că trei drepte duse prin* A, B, C *și întâlnind respectiv laturile* B′C′, C′A, A′B′ *sub acelaș unghiu* δ *concură într'un acelaș punct* P, *cele trei drepte care duse prin* A′, B′, C′ *întâlnesc respectiv laturile* BC, CA, AB *sub unghiul* $\pi - d$ *concură de asemenea într'un acelaș punct* P′.

Autorul numește triunghiurile ABC, A′B′C′ triunghiuri *isologice* și observă că *dacă triunghiul* ABC *este isologic cu cele două triunghiuri* A′B′C′, B′C′A′ *pentru acelaș unghiu* δ, *el este de asemenea isologic cu triunghiul* C′A′B′ *pentru acest unghiu.*

Iar asupra ortopolului d-l *Third* anunță teorema următoare:

„Dacă ducem prin vârfurile unui triunghiu ABC *trei paralele care întâlnesc o dreaptă* XY *în punctele* A′, B′, C′ *sub unghiul* δ, *atunci dreptele duse prin* A′, B′, C′ *și făcând respectiv cu* BC, CA, AB *unghiul* $\pi - \delta$ *concură într'un acelaș punct* P. Acest punct este numit *isopolul* dreptei XY, iar XY este o *isopolară* a punctului P".

Este ușor de văzut, pe o figură, că unghiul $-\delta$ după cum îl definește d-l Nicolau, nu este decât unghiul $\pi - \delta$ din generalizarea d-lui Third.

V. CRISTESCU.

Asupra problemei No. 13.

In „Culegerea de Probleme" la pag. 255 găsim, trecută sub numărul 26, următoarea problemă:

Să se calculeze suma celor dintâi n termeni ai șirului

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\ldots\ldots\frac{n}{a^n}+\ldots,(a>1).$$

Ce se întâmplă cu această sumă când n crește nemărginit ?

Dacă în acest șir dăm pe $\frac{1}{a}$ factor comun.

$$\frac{1}{a}\left(1+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}+\ldots\ldots\frac{n+1}{a^n}\right)$$

în paranteză avem tocmai seria din problema No. 13.

Suma șirului când $n=\infty$ e dată de

$$\underset{n=\infty}{S}=\frac{a}{(a-1)^2}$$ aceasta înmulțită cu a dă

$$\underset{n=\infty}{S_1}=\frac{a^2}{(a-1)^2}$$

Q. E. D.

I. N. GEORGESCU-VAL
Școala de Artilerie

Asupra dreptei lui Simpson.

Fie ABC un triunghiu oarecare și G, E, F proecțiile unui punct M, de pe cercul ABC, pe laturi, care proecții — se știe — sunt colineare.

Avem:

$EB = MB\cos\alpha$, $EC = MC\cos\beta$, $FC = MC\cos B$,

$FA = MA\cos\alpha$, $GA = MA\cos\beta$, $GB = MB\cos B$,

α, β și B fiind unghiurile MBE, MCE și ABM.

Rezultă că:

$$1 = \frac{MB\cos\alpha}{MC\cos\beta}\cdot\frac{MC\cos B}{MA\cos\alpha}\cdot\frac{MA\cos\beta}{MB\cos B} = \frac{EB}{EC}\cdot\frac{FC}{FA}\cdot\frac{GA}{GB}$$

adică G, E, F sunt colineare (în linie dreaptă).

Această soluție trigonometrică se poate traduce prin relații geometrice astfel:

$$EB = \frac{EB}{MB}\cdot MB;\quad EC = \frac{EC}{MC}\cdot MC;\quad FC = \frac{FC}{MC}\cdot MC;$$

$$FA = \frac{FA}{MA}\cdot MA;\quad GA = \frac{GA}{MA}\cdot MA;\quad GB = \frac{GB}{MB}\cdot MB$$

Insă:

$$\frac{EB}{MB} = \frac{FA}{MA},\quad \frac{EC}{MC} = \frac{GA}{MA},\quad \frac{FC}{MC} = \frac{GB}{MB}$$

căci: $\Delta EBM \sim \Delta FAM$, $\Delta MEC \sim \Delta MAG$,
$\Delta MFC \sim \Delta MBG$.

Prin urmare:

$$\frac{EB}{EC}\cdot\frac{FC}{FA}\cdot\frac{GA}{GB} = 1,$$ *adică* G, E, F *sunt colineare.*

Fie A_1, B_1, C_1 punctele unde diametrul MO tae laturile lui ABC.

Intr'un triunghiu AMC *două drepte* MO *și* MF *cari fac unghiuri egale cu laturile* MA *și* MC, *respectiv, se numesc isogonale.*

Se știe că:

1^0. — *Intr'un triunghiu* AMC *două isogonale* MB_1 *și* MF *determină, pe latura opusă, relația:*

$$\frac{FC\,.\,B_1C}{FA\,.\,B_1A} = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MA}^2}$$

2^0. — *Înălțimea* MF *și raza* MO *a cercului circumscris unui triunghiu* AMC *sunt isogonale.*

Prin urmare fie A_1, B_1, C_1 punctele unde diametrul MO tae laturile lui ABC. Conform (2^0), dreptele:

$$(MO, ME);\quad (MO, MF);\quad (MO, MG)$$

sunt isogonale respectiv în triunghiurile MBC, MAC și MAB.

Deci avem, conform relației (1^0):

$$\frac{FB\,.\,B_1C}{FA\,.\,B_1A} = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MA}^2};\quad \frac{C_1A\,.\,GA}{C_1B\,.\,GB} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2};$$

$$\frac{A_1B\,.\,EB}{A_1C\,.\,EC} = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}^2}$$

Inmulțind și ținând seamă că A_1, B_1, C_1 sunt colineare, — adieă:

$$\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C} = 1,$$

rezultă:

$$\frac{FC}{FA}\cdot\frac{GA}{GB}\cdot\frac{EB}{EC} = 1,$$ adică G, E, F sunt colineare.

Această soluție nouă a dreptei lui Simpson are avantajul că suggerează următoarea generalizare:

Fie ABC *un triunghiu oarecare și* A_1, B_1, C_1 *punctele unde o dreaptă oarecare* Δ *tae laturile triunghiului, iar* M *un punct oarecare. Picioarele* E, F, G *ale isogonalelor dreptelor* MA_1, MB_1, MC_1, *în raport cu triunghiurile* MBC, MCA, MAB, *sunt colineare.*

Soluția este aceiași. Dreapta lui Simpson e cazul particular când punctul M este pe cercul ABC, iar dreapta Δ e chiar diametrul ce trece prin M.

MICU GRÜNBAUM
(Bârlad).

Relațiuni între media aritmetică, media geometrică și media armonică a mai multor numere.

In „Revista de Matematicas y Fisicas elementales" (No. 5 Sept. 1921), este dată relațiunea

$$G_2^2 = A_2\,.\,H_2$$

în care G_2 e media geometrică a două numere, A_2 media aritmetică și H_2 media armonică.

Demonstrarea acestei relațiuni e foarte simplă:

Media geometrică a două numere a și b este $\sqrt{ab}$

Media aritmetică este $\frac{a+b}{2}$ și media armonică $\frac{2ab}{a+b}$.

Conform relațiunei de mai sus vom avea

$$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2ab}$$

ceiace e evident.

Această relațiune e însă complet generală:

Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_i \ldots . a_{n-1}, a_n, n$ numere.

Produsul: $a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_n$, a n numere se poate nota simbolic astfel:

$$a_1 . a_2 . a_3 \ldots , a_n = \prod_{i=1}^{i=n} a_i = \prod_{1}^{n} a_i.$$

De asemenea suma: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ se poate nota simbolic astfel:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i.$$

Media geometrică a lor va fi

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{i=n} a_i}$$

Media aritmetică va fi

$$A_n = \frac{\sum_{1}^{n} a_i}{n}$$

Media armonică va fi

$$H_n = \frac{n \prod_{1}^{n} a_i}{\sum_{1}^{n} a_i}$$

Aplicând formula de mai sus putem zice că *a $(n-a)$ putere a mediei geometrice a n numere este egală cu produsul dintre media aritmetică și media geometrică a acelor numere, adică*

$$G_n^n = A_n . H_n \qquad (a)$$

b) Câtul dintre media aritmetică și media armonică a mai multor numere este egal cu câtul dintre pătratul mediei aritmetice și media geometrică, ridicată la o putere egală cu numărul termenilor.

Să însemnăm cu G_n media geometrică a n numere, cu A_n media aritmetică și cu H_n media armonică.

Să demonstrăm că.

$$\frac{A_n^2}{G_n^n} = \frac{A_n}{H_n} \qquad (b)$$

In adevăr, conform proprietăților proporțiilor avem $A_n^2 . H_n = G_n^n . A_n$

sau împărțind cu A_n în ambii membrii căpătăm

$$A_n . H_n = G_n^n$$

care e chiar relațiunea (a) demonstrată mai sus.

c) Din relațiunea (b), aplicând toate proprietățile proporțiilor, căpătăm o mulțime de relațiuni ce pot exista între cele trei medii ale mai multor numere.

Ion S. Antoniu
elev cl. VII R. lic. Mil. M-rea Dealul

Asupra problemei No. 7.

Din relațiunea.

$$\frac{\overline{M_1A}^2}{\overline{M_1B}^2} = \frac{\overline{M_2A}^2}{\overline{M_2B}^2} K^2, \qquad (1)$$

deducem că punctele AM_1BM_2, formează o diviziune armonică. (Nota d-lui Bugeanu, din No. 12).

M fiind mijlocul lui M_1M_2, descriem un cerc cu centrul în M și cu diametru egal cu M_1M_2. Presupunem că A este exterior cercului; D fiind punctul de tangență al unei drepte ce trece prin punctul A, la cercul M, avem puterea punctului A față de cerc, egală cu:

$$AM_1 . AM = \overline{AD}^2,$$

iar din triunghiul dreptunghiu ACM, scoatem:

$$AB . AM = \overline{AD}^2,$$

$$\therefore \quad AM_1 . AM_2 = AB . AM. \qquad (2)$$

Din triunghiurile dreptunghice: $DM_1 M_2$ și AMD, scoatem:

$$BM_1 . BM_2 = \overline{BD}^2 \text{ și } AB . BM = \overline{BD}^2.$$

$$BM_1 . BM_2 = AB . BM, \qquad (3)$$

Impărțind relațiunile (2) și (3), apoi ridicând la patrat și ținând seama de relațiunea (1), obținem relațiunea ce se caută:

$$\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2} = K^4$$

Ion Rizescu
Constanța

PROBLEME PROPUSE

130. — Să se găsească un număr de trei cifre știind că suma produselor două câte două a cifrelor sale este 17 și că cifra sutelor întrece cu o unitate cifra unităților.

ALEXANDRU TAUBER

131. — Care sunt termenii comuni progresiunilor aritmetice

$$\div 2 . 7 . 12 \ldots ; \div 5 . 11 . 17 \ldots ; \div 7 . 15 . 23 \ldots$$

I. DUMITRIU-ARAD

132. — Să se determine m, întreg, așa ca expresiunea:

$$E = m \cdot 2^{12k-1} + 1$$

să fie divizibilă prin 105.

A TH NICOLAU

133. — Să se rezolve ecuațiunea:

$$(x^4 + 3)(x^4 + 2) = 5x^4 + 7x^{-4}.$$

ION S. ANTONIU

134. — Să se arate că condițiunea ca polinomul $x^n - mx^{n-1} - mx + 1$ să fie divizibil prin $x^3 - 1$ este ca $n = 3p + 1$, $m = 1$ și în acest caz să se afle câtul.

MAIOR O. BUGEANU

135. — Să se rezolve ecuațiunea

$$2\sin^4 x - \sin^2 x (4\cos x - 3) = 5\cos x + 1.$$

G. BRATU.

136. — Să se arate, că dacă avem:

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = (xy + yz + zx - 1)^2$$

atunci vom avea și

$$(x + y + z - xyz)^2 = 0.$$

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

137. — Să se determine α și β astfel ca limita expresiunei

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \alpha x - \beta$$

să fie egală cu 1 când x crește nemărginit.

N. ABRAMESCU

138. — Să se demonstreze, că în orice triunghiu există relațiunile:

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos A}{h_a} + \frac{\cos B}{h_b} + \frac{\cos C}{h_c}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\cos A}{r_a} + \frac{\cos B}{r_b} + \frac{\cos C}{r_c}$$

notațiunile fiind cele obicinuite.

LOCOT. GRIGORE ZAPAN

139. — Fie H punctul de întâlnire a înălțimilor, A_1, B_1, C_1 picioarele lor, A_2, B_2, C_2 picioarele medianelor unui triunghiu ABC. Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor $A_1 A_2 H$, $B_1 B_2 H$, $C_1 C_2 H$.

Să se arate că centrul cercului lui Euler (celor 9 puncte) al triunghiului ABC este artocentrul triunghiului $O_1 O_2 O_3$.

I. T. RIZESCU

140. — Să se indice operațiunile ce trebuesc făcute, pentru a construi expresiunea

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{ab}{c}}$$

și să se indice valoarea ei, geometric aflată, pentru $a = 7{,}2$; $b = 5{,}4$; $c = 1{,}2$.

GH. M. VASILIU
Inginer Silvic

141. — De vârfurile unei plăci triunghiulare să atârnă greutăți proporționale cu laturile triunghiului ei ortic. Din ce punct trebue să suspendăm placa printr'un fir, pentruca în poziționea de echilibru placa să fie orizontală?

E. ABASOHN

INFORMATIUNI

La problema No. 89 publicată în No. 3 al acestei Reviste s'a omis a se menționa, că au mai rezolvat această problemă și d-nii: Pincu Katz, Izidor Samovici, Dimitriu Atanasiu, Dili C. Schileru, Vasile Gabrielescu, Gr. Livada, Stoenescu Al. I., Gh. Nestianu, Adalber Felix Kanner, Popovici Th. Ioan, Emil Ștefănescu și Bușilă A. Adrian.

——

Din cauză că unele soluții ale problemei No. 86, au fost împărțite în redacție, în redactarea dintâi a acestei probleme publicată în No. 2 al acestei Reviste s'a omis unele soluții și pentru acest motiv, problema s'a publicat din nou mai scurt pentru celelalte soluții rămase în No. 3 al Reviste.

——

D-l *N. Muzicescu*, profesor la liceul din T.-Severin, membru în comitetul de redacție al Revistei Matematice din Timișoara, și care a luat parte la înființarea acestei reviste, a binevoit a dona pentru dânsa suma de 300 (trei sute) lei. Mulțumim și pe această cale d-lui Muzicescu pentru concursul pe care îl dă revistei noastre pe cale morală și materială și sperăm că gestul d-sale va găsi imitatori printre aceia care cred ca și noi că munca dezinteresată ce se depune pentru pregătirea școlară a noilor serii nu este perdută.

——

Sfătuim încă odată pe colaboratorii noștri, în interesul lor propriu, că soluțiile trebuesc trimise câte una pe o singură parte a hârtiei și mai ales, trebuește iscălită fiecare soluție în parte.

——

In luna Septembrie, toamna aceasta, va avea loc la Timișoara al doilea Congres al Asociației Generale a Inginerilor din România (A. G. I. R.) unde se vor discuta chestiuni de interes general în privința diverselor probleme mari economice, comerciale și industriale ce să pun în România nouă întregită. După cum să știe primul Congres a avut loc toamna trecută la Iași.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMISOARA.

ANUL II. 15 IULIE 1922. No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. V. ALACI ASUPRA UNOR INSUMARI TRIGONOMETRICE
2. PROBLEME REZOLVATE.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. NOTE MATEMATICE.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1922

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **Ing. M. Vasiliu** sub-directorul Fabricei de Tutun, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

BIBLIOTECA ASTRA" SIBIU

ANUL II. — No. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1922

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Inginer M. VASILIU, Fabrica de Tutun, Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

ASUPRA UNOR INSUMARI TRIGONOMETRICE

de V. ALACI

In articolul „Aria și volumul sferei“ din „G. M.“ an. XX, No. 10, am fost obligat să efectuez câteva însumări trigonometrice și am găsit:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k^2\pi}{n(n+1)} \sin\frac{2k\pi}{n(n+1)} = 2 \quad \text{și}$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\cdot\pi}{n(n+1)} \sin\frac{2k\pi}{n(n+1)} \cos\frac{k\pi}{n(n+1)} = 2$$

In prezentul articol voi calcula câteva însumări trigonometrice analoage, mai generele.

1. Fie de calculat,

$$(1) \quad S = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k^2\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \sin\frac{ak\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$$

a și n fiind numere întregi.

Evident că putem scrie succesiv:

$$(2) \quad S = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} - \cos\frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \left(\sum_{k=1}^{a} \cos\frac{k(k-1)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} + \sum_{k=a+1}^{n} \cos\frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} - \sum_{k=1}^{n-a} \cos\frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} - \sum_{k=n-a+1}^{n} \cos\frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \right)$$

Observăm însă că,

$$(3) \quad \sum_{k=a+1}^{n} \cos\frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} - \sum_{k=1}^{n-a} \cos\frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \equiv 0$$

fiindcă termenii se reduc doi câte doi.

Vedem însă că,

$$(4) \quad \lim_{u=\infty} \sum_{k=1}^{a} \cos\frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} = \lim_{n=\infty} \left[\cos\frac{(1-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} + \cos\frac{2(2-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} + \ldots + \cos 0 \right] = a,$$

fiecare termen tinzând pentru $n=\infty$, către $\cos 0 = 1$.

Asemenea:

$$(5) \quad \lim_{n=\infty} \sum_{k=n-a+1}^{n} \cos\frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} = \lim_{n=\infty} \left[\cos\frac{(n-a+1)(n+1)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} + \cos\frac{(n-a+2)(n+2)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} + \ldots + \cos\frac{n(n+a)}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\pi \right] = a\cos\frac{\pi}{\alpha}$$

Relațiunea (2) în virtutea egalităților (3), (4) și (5), devine:

$$(6) \quad S = \frac{a}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{\alpha}\right) = a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$$

Caz particular. Pentru $a=\alpha=2$, $\beta=\gamma=0$, avem:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\cdot\pi}{2n^2} \sin\frac{k\pi}{n^2} = 1.$$

2. Fie de calculat,

(7) $$S_1 = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \sin \frac{ak\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \cos \frac{bk\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma},$$

a, b și n fiind numere întregi.

Observând că

$$\sin \frac{ak\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \cos \frac{bk\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} = \frac{1}{2}\left[\sin \frac{(a+b)k\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} + \sin \frac{(a-b)k\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\right],$$

putem scrie:

$$S_1 = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \sin \frac{(a+b)k\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} + \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \sin \frac{(a-b)k\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$$

Ambele acest 2 limite sunt de aceiași formă ca (1), în care a este înlocuit cu $a+b$, și $a-b$, așa dar în virtutea relațiunei (6) putem scrie:

(8) $$S_1 = \frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2}(a-b)\sin^2\frac{\pi}{2\alpha} = a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$$

Caz particular. Pentru $\alpha = \frac{3}{2}$ $\beta=\gamma=0$, $a=b=2$ avem:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2k^2\pi}{3n^2} \sin \frac{8k\pi}{3n^2} = 3.$$

Observare. Insumarea (8) ne învederează că S_1 nu depinde de b și are aceiași valoare ca și suma S.

3. Fie de calculat,

(9) $$S_m = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{k^2\pi}{A} \sin \frac{ak\pi}{A} \prod_{i=1}^{m} \cos \frac{b_i k\pi}{A}\right)$$

unde, $A = \alpha n^2+\beta n+\gamma$ și a, b_1, b_2, ... b_m sunt numere întregi.

Vom stabili din aproape în aproape că efectuând însumarea (9) obținem tot $a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$.

In adevăr am stabilit că,

(10) $$S = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{A} \sin \frac{ak\pi}{A} = a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$$

(11) $$S_1 = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{A} \sin \frac{ak\pi}{A} \cos \frac{b_1 k\pi}{A} = a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$$

Să calculăm acum pe,

$$S_2 = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{A} \sin \frac{ak\pi}{A} \cos \frac{b_1 k\pi}{A} \cos \frac{b_2 k\pi}{A}$$

Observăm că,

$$\sin \frac{ak\pi}{A} \cos \frac{b_2 k\pi}{A} = \frac{1}{2}\left[\sin \frac{(a+b_2)k\pi}{A} + \sin \frac{(a-b_2)k\pi}{A}\right]$$

rezultă atunci:

(12) $$S_2 = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{A} \sin \frac{(a+b_2)k\pi}{A} \cos \frac{b_1 k\pi}{A} + \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{A} \sin \frac{(a-b_2)k\pi}{A} \cos \frac{b_1 k\pi}{A}$$

In virtutea relațiunei (11) în care punem în locul a, $a+b_2$ și $a-b_2$, relațiunea (12) devine:

$$S_2 = \frac{1}{2}(a+b_2)\sin^2\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{1}{2}(a-b_2)\sin^2\frac{\pi}{2\alpha} = a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}.$$

Pentru a stabili în mod general că și,

$$(13) \quad S_m = a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$$

vom întrebuința metoda inducțiunei complecte.

Insumarea (13) fiind stabilită pentru $m=1$ și $m=2$, vom presupune că e adevărat pentru $m-1$, adică că,

(14) $$S_{m-1} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{k^2\pi}{A} \sin \frac{ak\pi}{A} \cos \frac{b_1 k\pi}{A} \ldots \cos \frac{b_{m-1} k\pi}{A}\right) = a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$$

și rămâne a dovedi că se menține și pentru S_m.

Privind acum expresiunea (9) a lui S_m și observând că,

$$\sin\frac{ak\pi}{A}\sin\frac{b_m k\pi}{A}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(a+b_m)k\pi}{A}+\sin\frac{(a-b_m)k\pi}{A}\right)$$

avem:

$$(15)\quad S_m=\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k^2\pi}{A}\sin\frac{(a+b_m)k\pi}{A}\cos\frac{b_1k\pi}{A}\ldots\right.$$
$$\left.\cos\frac{b_{m-1}k\pi}{A}\right)+\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k^2\pi}{A}\sin\frac{(a-b_m)k\pi}{A}\right.$$
$$\left.\cos\frac{b_1k\pi}{A}\ldots\cos\frac{b_{m-1}k\pi}{A}\right).$$

In virtutea relațiunei (14), în care punem în locul lui a, $a+b_m$ și $a-b_m$, relațiunea (15) devine:

$$S_m=\frac{1}{2}(a+b_m)\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}+$$
$$\frac{1}{2}(a-b_m)\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}=a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$$

Avem astfel calculată însumarea (9).

Din cele de mai sus se desprinde următoarea teoremă:

Teoremă. Dacă considerăm însumarea,

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k^2\pi}{A}\sin\frac{ak\pi}{A}$$

unde $A=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ *și dacă multiplicăm fiecare termen respectiv cu oricâți factori de forma,*

$$\cos\frac{b_ik\pi}{A},\quad k=1,2,\ldots n,$$

suma ei nu se modifică și rămâne necontenit. $a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}$.

Caz particular. Pentru $a=\alpha=2$, $\beta=\gamma=0$, $b_1=b_2=\ldots=b_m=1$, $m=5$, avem:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k^2\pi}{2n^2}\sin\frac{k\pi}{n^2}\cos^5\frac{k\pi}{2n^2}=1.$$

4. Să cercetăm acum condițiile cele mai largi, ca însumarea mai generală,

$$(16)\quad \lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(ak^2+bk+c)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\sin\frac{(a_1k^2+b_1k+c_1)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$$

să se poată efectua prin artificiu care a permis însumarea dela § 1.

Putem scrie,

$$(17)\quad S_4=\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos A_1-\cos A_2\right)=$$
$$\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\left(\sum_{k=1}^{2r}\cos A_1+\sum_{k=r+1}^{n}\cos A_1-\sum_{k=1}^{n-2r}\cos A_2-\right.$$
$$\left.\sum_{k=n-2r+1}^{u}\cos A_2\right)$$

unde:

$$A_1=\frac{[(a-a_1)k^2+(b-b_1)k+c-c_1]\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma},$$
$$A_2=\frac{[(a+a_1)k^2+(b+b_1)k+c+c_1]\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$$

A_r trebui să avem aici ca în § 1,

$$(18)\quad \sum_{k=2r+1}^{n}\cos A_1-\sum_{k=1}^{n-2r}\cos A_2\equiv 0.$$

Artificiul ce a permis ca membrul întâi al egalității (3) din § 1, să fie identic nul constă în aceea că termenul $\cos\frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$ din prima sumă prin substituirea lui k prin $k+a$ se transformă în $\cos\frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$ din a doua sumă.

Pentru ca membrul întâi din (18) să fie identic nul trebuie ca și $\cos A_1$, prin schimbarea lui k în $k+2r$ să se transforme în $\cos A_2$, trebue deci ca să avem oricare ar fi k:

$$(a-a_1)(k+2r)^2+(b-b_1)(k+2r)+c-c_1\equiv$$
$$(a+a_1)k^2+(b+b_1)k+c+c,$$

Egalând coeficenții acelorași puteri ale lui k, avem:

$$a-a_1=a+a_1,\quad \text{de unde}\quad a_1=0$$

apoi.

$$4ar+b-b_1=b+b_1,\quad \text{de unde}\quad b_1=2ar$$

în fine,

$4ar^2+2r(b-2ar)+c-c_1=c+c_1$, de unde $c_1=br$

Astfel dacă luăm,

(19) $\qquad a_1=0, \quad b_1=2ar, \quad s_1=br$

identitatea (18) are loc și dezvoltarea (17) devine:

$$(20)\qquad S_4=\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\left(\sum_{k=1}^{2r}\cos A_1-\sum_{k=n-2r+1}^{n}\cos A_2\right)$$

Sumele din membrul al 2lea au însă limite finite, astfel e ușor de văzut că,

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos A_1=2r \text{ și } \lim_{n=\infty}\sum_{k=n-2r+1}^{n}\cos A_2=2r\cos\frac{a\pi}{2\alpha}$$

Dezvoltarea (17) devine astfel:

$$S_4=r\left(1-\cos\frac{a\pi}{2\alpha}\right)=2r\sin^2\frac{a\pi}{2\alpha}$$

Așa dar avem construită următoarea însumare, care generalizează însumarea (1) dela § 1.

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(ak^2+bk+c)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\sin\frac{r(2ak+b)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}=2r\sin^2\frac{a\pi}{2\alpha}$$

5. Urmând același mers ca în § 3 putem stabili că:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(ak^2+bk+c)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\sin\frac{r(2ak+b)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\times\prod_{i=1}^{m}\cos\frac{b_i(2ak+b)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\right)=2r\sin^2\frac{a\pi}{2\alpha}$$

6. Rezultă din paragrafele precedente că putem exprima numerile întregi, fracționare sau incomensurabile prin anumite însumări trigonometrice. Dacă luăm astfel însumarea (6), $\beta=\gamma=0$, avem:

$$(21)\qquad a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}=\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k^2\pi}{\alpha n^2}\sin\frac{ak\pi}{\alpha n^2}$$

a fiind un număr întreg

Pentru $\alpha=1$, avem:

$$a=\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k^2\pi}{\alpha n^2}\sin\frac{ak\pi}{n^2}$$

Pentruca desvoltarea (21) să reprezinte un număr fracționar sau incomensurabil δ, vom determina pe α astfel ca:

$$(22)\qquad a\sin^2\frac{\pi}{2\alpha}=\delta,$$

a fiind cel mai mare întreg cuprins în δ.

Exemplu 1. Dacă $\delta=\frac{21}{4}$, ecuațiunea (22) ne dă,

$a=5, \quad \sin^2\frac{\pi}{2\alpha}=\frac{1}{4}$, de unde $\frac{\pi}{2\alpha}=p\pi+(-1)^p\frac{\pi}{6}$

sau,

$$\alpha=\frac{3}{6p+(-1)^p}, \quad (p=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

Dezvoltarea (21) devine, luând $p=0$.

$$\frac{21}{4}=\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k^2\pi}{3n^2}\sin\frac{5k\pi}{3n^2}$$

Exemplu 2. Dacă $\delta=\frac{14-7\sqrt{3}}{4}$; atunci ecuațiunea (22) ne dă:

$$a=7, \quad \sin^2\frac{\pi}{2\alpha}=\frac{2-\sqrt{3}}{4},$$

de unde,

$$\sin\frac{\pi}{2\alpha}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\sin\frac{\pi}{12}$$

Cea mai simplă valoare a lui α fiind $\alpha=6$ dezvoltarea (21) devine:

$$\frac{14-7\sqrt{3}}{4}\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k^2\pi}{6n^2}\sin\frac{7k\pi}{6n^2}$$

Observare. Evident că putem studia și însumări trigonometrice mai generale, de forma;

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\varphi_m(k)\pi}{\Psi_m(n)}\sin\frac{\varphi_m(k)\pi}{4_m(n)}$$

unde f_m, φ_m. Ψ_m, însemnează niște polinoame de gradul m.

PROBLEME REZOLVATE

90. — *Știind că cel mai mare comun divizor a cinci numere întregi, distincte, luate două câte două este 13 și că cel mai mic multiplu comun al lor este 2730, să se afle acele numere.*

STOENESCU AL. I.

Soluțiune dată de d-l *Andrei Miclescu* Școala militară de Artilerie Timișoara.

Descompunem numărul 2730 în factori primi. Apoi din definiția celui mai mare comun divizor, știm că factorul 13, trebue să fie cuprins în fiecare din acele numere. Pe de altă parte, din definiția celui mai mic multiplu comun, deducem că cele 5 numere distincte pot fi orice număr, care s'ar putea forma cu factorii primi a lui 2730, afară de 13, care apoi s'ar înmulți cu numărul 13.

Vom avea deci $2730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ de unde deducem numerile

$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7$

$2 \times 3, \; 2 \times 5, \; 2 \times 7, \; 3 \times 5, \; 3 \times 7, \; 5 \times 7$

$2 \times 3 \times 5, \; 2 \times 3 \times 7, \; 2 \times 5 \times 7, \; 3 \times 5 \times 7$

$2 \times 3 \times 5 \times 7$

pe care înmulțindu-le pe fiecare cu 13, obținem numerile.

26, 39, 65, 91, 78, 130, 182, 195, 273, 455, 390, 546, 910, 1365, 2730

la care adăugăm și pe 13. Toate aceste numere satisfac problemei, și din ele putem lua câte 5 în orice mod voim, ceiace conform formulei combinărilor, ne dă 4368 de soluții.

Au rezolvit problema bine, găsind numai un șir de soluții, domnii:

Cristea P. Goilav student, *Tuducescu A. Nicolae, Simionescu I. Nicolae, Herman Novac, Nicu Părăianu, Pincu Katz, Const. E. Georgescu, Georgescu N. Ioan, Măru Dumitru, Lucien Gavrilescu, Florian Er. Georgescu, Constantin Berdan, Dobrescu M. Filip, Ristea Marin, Tiberiu Popovici, Ionescu I. Ilie, Vincențiu Giotta, Popescu N. Ștefan, Florea I. Negretzu, Silion Gh. Ion, E. Iliescu, Costăchescu N. Ionel, Boneu Ion, I. C. Zamfirescu, Ionescu I. Carol, Marinescu M. Ioan, Dumitrescu G. Marin Solomon Wilhelm, Maximilian Grünfeld, Nestеanu Gh., Atanăsiu I. Dumitru, Șerbănescu Ion, Petrescu Cernea, Constantinescu Ion, Bănărescu Lucrețius, Gr. C. Moisil, Aurel Th. Dumitriu, Iliuț I. Prundeanu, Gh. Stancu, Călin I. Aureliu și Vasile Dan.*

Soluțiune asemenea bună a d-lui *Rădulescu Titiu* din cl. IVa liceului Militar „Mânăstirea-Dealul" Târgoviște.

Au găsit câte 11 soluții d-nii.: *Florea I. Negretzu, Dobescu N. Filip, Ristea Marin* și *Ionescu I. Ilie.*

102. — *Dacă p reprezintă un număr prim și a un număr nedivizibil prin p, să se arate că expresiunea:*

$$E = a \cdot 2a \cdot 3a \ldots \ldots (p-1) \cdot a + 1$$

este divizibilă cu p.

GRIGORE ZAPAN.

Soluție dată de d-l *Cristea Goilav* Tecuci.

Expresiunea dată se poate pune sub forma:

$$E = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1) \cdot a^{p-1} + 1$$

$$\therefore E = (p-1)! \, a^{p-1} + 1$$

Adunând și scăzând $(p-1)!$ avem forma remarcabilă:

$$E = (p-1)! \, (a^{p-1} - 1) + \left[(p-1)! + 1\right]$$

unde: $a^{p-1} - 1 = Mp$, conform teoremei lui Fermat.
și $(p-1)! + 1 = Mp$, „ „ „ Wilson,

Prin urmare:

$$E = Mp.$$

Q. E. D.

Au rezolvat foarte bine problema, pe aceiași cale, domnii:

I. N. Georgescu-Val, A. Miclescu și *I. M. Popescu* Școala Artilerie, *P. Cazanacli, E. Scoruțeanu, M. Săvescu, Em. Socianu, Al. Stoenescu, O. Ulman.*

Din clasa VIII liceală domnii:

D. C. Schileru Craiova, *C. E. Georgescu* București, *Isaia Nicolescu* Ploești, *N. Dinulescu, P. Katz, D. Măru* Galați, *N. Teodoru* Huși, *I. Isidor* Focșani, *Traian Dordea* și *Aurel Sufletel* „M-rea Dealului".

Din clasa VII liceală domnii:

N. Georgescu-Rogen „M-rea Dealului", *I. S. Antoniu, I. Constantinescu, E. Iliescu, M. Focșeneanu* „M-rea Dealul", *Al. Tauber* și *Al. Pamula* liceul Laurian Botoșani, *C. Berdan, V. Giotta* Bârlad, *I. Stoenescu, Fl. Georgescu, Th. I. Popa, Em. Ștefănescu, Adr. Bușilă, Virg. Ghițescu, I. Șerbănescu, Al. Niculescu* București, *Fl. Negretzu, Șt. Popescu* Pitești, *Silion Gh. Ion* Câmpina, *Tiberiu Popovici* Arad, *M. Bogdan* Caracal, *Al Brăileanu* Constanța.

Din clasa VI liceală domnii:

Atanasiu I. Dumitru, Bănărescu Lucrețiu, Boneu Ion, Neștianu Gh., Popovici-Puiu-Dan, Răuț C., Vasilache Sergiu „M-rea Dealul", *Ov. Popea, Virg. Vasiliu* Constanța, *M. Grünfeld, V. Gabrielescu* Brăila, *L. Weiss* Galați, *M. Dumitrescu* Craiova, *W. Solomon* București.

Din clasa V liceală domnii:

Atanasiu Virgil Bârlad,

Observaţiuni.

1°. — D-l *Ioan Şerbănescu* liceul „Mihai-Viteazul“ Bucureşti, generalizează problema arătând că în general avem:

$$E \equiv a^n . (2a)^n . (3a)^n \ldots [(p-1)a]^n - (-1)^n = Mp$$

2°. — Tot d-l I. Şerbănescu stabileşte următoarea relaţiune:

$$E \equiv 1.2.3\ldots(p-1).p + 2(1+2+3+\ldots+p) = Mp^2$$

3°. — Cu această ocaziune sfătuim pe corespondenţi a nu se mulţumi numai cu simpla rezolvire a unei probleme, ci a căuta să pătrundă bine chestiunea ce o studiază şi pe cât e posibil, să vadă dacă nu cumva problema e un caz particular dintr'un ciclu mai general de proprietăţi. Foarte deseori, pornind dela studierea unei chestiuni simple, se pot descoperi proprietăţi generale, cari zac ascunse în noianul atât de variat — dar frumos — al ştiinţei.

Nu e nevoe să se rezolve o mare cantitate de probleme, ci mai puţine, dar bine şi profund studiate. „Non multa, sed multum!“

GR. Z.

103. — *Să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea următoare:*

$$E = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 5a + \operatorname{tg} 7a}{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} 3a - \operatorname{ctg} 5a + \operatorname{ctg} 7a}$$

M. SARIAN.

Soluţiune dată de d-l *I. N. Georgescu-Val* Şcoala militară de Artilerie Timişoara.

Expresiunea dată, se poate scrie succesiv:

$$E = \frac{\left(\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin 5a}{\cos 5a}\right) - \left(\frac{\sin 3a}{\cos 3a} - \frac{\sin 7a}{\cos 7a}\right)}{\left(\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos 5a}{\sin 5a}\right) - \left(\frac{\cos 3a}{\sin 3a} - \frac{\cos 7a}{\sin 7a}\right)}$$

$$E' = \frac{\sin 4a\,(\cos a \cos 5a - \cos 3a \cos 7a)}{\sin 4a\,(\sin 3a \sin 7a - \sin a \sin 5a)} \times$$

$$\times \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 5a \operatorname{tg} 7a$$

însă avem din trigonometrie:

$$2 \cos a \cos 5a = \cos(a + 5a) + \cos(a - 5a)$$

$$2 \cos 3a \cos 7a = \cos(3a + 7a) + \cos(3a - 7a)$$

$$2 \sin a \sin 5a = \cos(a - 5a) - \cos(a + 5a)$$

$$2 \sin 3a \sin 7a = \cos(3a - 7a) - \cos(3a + 7a)$$

şi deci înlocuind avem:

$$E = \frac{\cos 6a - \cos 10a}{\cos 6a - \cos 10a} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 5a \operatorname{tg} 7a$$

şi dar expresiunea, căutată, calculabilă prin logaritmi este:

$$E = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 5a \operatorname{tg} 7a.$$

Au dat soluţiuni foarte bune şi domnii:
Andrei Miclescu, Em. V. Soceanu, Octav Ulman, Tuducescu A. Nicolae, M. Gh. Săvescu, Samovici Isidor, Nicuţă St. Theodoru, Pincu Katz, Dili C. Schileru, Const E. Georgescu, Măru Dumitru, Ion S. Antoniu, E. Iliescu, Dinulescu N. Nicolae, Ion I. Iliescu, C. Berdan. I. St. Teodorescu, Emil Ştefănescu, Al. I. Stoenescu, Georgescu C. Ion, Popescu N. Ştefan, Popa I. Teodor, Geanău Ion, Virgiliu Ghiţescu, Ion Lăzărescu, Tiberiu Popovici, Buşilă A. Adrian, Macri Socrate, Dragomirescu G. Ioan, Alex. Tauber, Solomon Alfred, Stamatescu V., Florian Er. Georgescu, Ioan B. Ionescu, Stănciulescu A. Gheorghe, Alex. Pamula, Dragomir M. Ion, Ion Şerbănescu, Florea Negretzu, Mih. Stamatiu, Ion Coşereanu, V. Dan, Constantinescu Ion, Puiu Juster, Grigore G. Giovani.

Observare. D-nii *Dili C. Schileru, Const. E. Georgescu, Florea Negretzu* şi *Şerbănescu Ion* au considerat cazul mai general, când coeficienţii lui a sub notaţiile trigonometrice s'ar succeda general într'un anumit mod, găsind un produs analog de patru tangente.

105. — *Fie* D *şi* E *picioarele bisectriţelor unghiului* A *a unui triunghiu* ABC *şi* M *mijlocul laturei* BC. *Să se demonstreze că;*

$$\frac{ME}{MD} = \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2$$

în care b şi c sunt laturile AC *şi* AB.

LOCOT COL. GH BUICLIU

Soluţiune dată de d-nii *I. N. Georgescu-Val* Şcoala militară de artilerie Timişoara şi *Mircea Bobârnac* student Bucureşti.

Punctele D şi E, picioarele bisectriţelor, împart latura BC a triunghiului în părţi proporţionale

între ele și proporționale cu laturile adiacente, adică în diviziune armonică. Rezultă:

$$\frac{DB}{DC} = -\frac{EB}{EC} = \frac{c}{b} \qquad (1)$$

și $$\overline{MB}^2 = MD \cdot ME \qquad (2)$$

ceiace indică că punctele D și E vor fi neapărat de aceiași parte a mijlocului M, de ex. spre dreapta.

Din (2) scoatem:

$$\frac{ME}{MD} = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MD}^2} \qquad (3)$$

însă $$\overline{MD}^2 = (BD - BM)^2$$

iar (1) ne dă $$\frac{DB + DC}{b + c} = \frac{DB}{c}$$

de unde $DB = \frac{ac}{b+c}$, așa că $\overline{MD}^2 =$

$$\left(\frac{ac}{b+c} - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\left(\frac{c-b}{c+b}\right)^2$$

Așa că (3) devine

$$\frac{ME}{MD} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4}{a^2}\left(\frac{c+b}{c-b}\right)^2 = \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2$$

tocmai relația ce era de demonstrat.

Soluțiuni foarte bune au dat domnii:

Cristea P. Goilav, Octav Ulman, Nic. Matei, Stoenescu I. Alexandru, Const. Iorgulescu, M. Gh. Săvescu, Em. V. Soceanu, Ioan I. Huber, Crăiniceanu Gheorghe, Pincu Katz, Const. E. Georgescu, Dili C. Schileru, M. Cocorandu Ernest G. Oprișan, Stamatiu I. Mih., Nicuță St. Theodoru, Ion S. Antoniu, Emilan Iliescu, Ion I. Iliescu, Mihăescu D. Constantin, Al. Brăileanu, Ioan B. Ionescu, Dragomirescu G. Ion, Tiberiu Popovici, Ion Lăzărescu, Virgiliu Ghițescu, Popa I. Teodor, Alexandru Pamula, Silion Gh. Ion, Georgescu C. Ioan, Florea Negretzu, Stoenescu Al. I., Dragomir N. Ioan, C. Berdan, Alexandru Tauber, Constantinescu Ion, Solomon Alfred, Vincențiu Giotta, Popa I. Teodor, Florian Er. Georgescu, Emil Ștefănescu, Popescu N. Ștefan, Școdreanu Alexandru, Gr. C. Moisil, Cazanacli Petre, Cr. Rigani, Scoruțeanu I. Eugen, Puiu Juster, Chiorescu Constantin, I. St. Teodorescu, Isaiia Nicolescu și *Ion Coșereanu.*

Observare. D. *Ioan M. Șerbănescu* cl. VI liceul „Mihai-Viteazul" Bucuresti, observă că valoarea raportului tratată în problema de față, să pune și sub alte forme, și anume sub următoarele:

$$\frac{ME}{MD} = \left(\frac{h_b + h_c}{h_c - h_b}\right)^2 = \left[\frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_a}}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b}}\right]^2$$

$$= \left(\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}\right)^2 = \left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B-C}{2}\right)^2$$

pe care le deduce folosindu sede diferitele relații cunoscute, între elementele unui triunghiu.

Notă. S'au mai primit încă două soluțiuni neiscălite.

RECREATIUNI MATEMATICE

Ghicirea orei la care o persoană își propune să se scoale a doua zi.

Regula de urmat.—Scrieți primele 12 numere pe 12 bilete sau cărți de vizită și apoi așezați-le circular, pe o masă, în ordinea numerelor. Intoarceți-le pe dos și notați-vă bine locul biletului cu numărul 1. Rugați persoana, care dorește să-i ghiciți ora la care își propune să se scoale, să pună mâna pe unul din acele bilete. De oarece știți locul biletului cu numărul 1, veți deduce ușor numărul biletului pe care a pus mâna. Măriți acest număr cu 12 și dați rezultatul persoanei, punând-o să numere în gând pe bilete, până la acest număr, începând cu ora la care își propune să se scoale a doua zi. Numerotarea aceasta o va face începând cu biletul pe care a pus mâna și în sensul contrar al ordinei biletelor. Biletul la care se va opri din această numerotare va reprezenta ora la care și-a propus să se scoale.

Exemplu.

Dacă persoana și-a propus să se scoale la ora 6 și a pus mâna pe biletul cu numărul 9, ea va număra în gând pânăla $9 + 12 = 21$, în sens opus ordinei biletelor, începând a număra cu numărul 6 pe biletul pe care a pus mâna (adică biletul cu numărul 9); apoi 7 pe biletul următor (No. 8) și așa mai depaete. Numărul 21 va cădea asupra biletului cu numărul 6, care reprezintă ora la care și-a propus să se scoale.

GRIGORE ZAPAN

Calculul Mintal. Nu trebue a lăsa să se desvolte prea mult, la copii, facultatea calculului mintal; însă totuşi este bine a-i exercita până la un punct, în frageda lor vârstă. Facultatea aceasta un moment atinsă, să conservă şi se desvoltă mai târziu uşurând foarte mult studiile tuturor ştiinţilor. Cei mai mari matematiciani nu au trecut acest lucru cu vederea. Astfel Euler şi Wallis erau în acelaş timp savanţi iluştri şi calculatori distinşi. Ei rezolvau, fără ajutorul creionului, probleme numerice ori algebrice, din cele mai complicate. Wallis era dotat de o memorie prodigioasă. I se întâmplă într'o noapte, de a extrage din minte, rădăcina patrată a unui număr de 50 de cifre şi de a o dicta a doua zi. Pe hârtie, această operaţie ar cere aproape o oră şi poate n'ar fi siguranţa exactităţei, fără un control. Este cunoscută următoarea anecdotă descrisă de Arago în biografia lui Monge: Lagny era un membru distins, a vechei Academii de Ştinţă. El adoră calculile numerice. El a dat în special cele 154 de prime zecimale a raportului circumferinţei la diametrul său. Către sfârşitul vieţei sale, într'o boală gravă, el căzuse într'o stare atât de mare de nesimţire, încât timp de mai multe zile, orice încercare de a-l face să scoată o silabă fu zadarnică. Şi atunci unul din amicii lui îi murmură la ureche: „cât face 12 ori 12"? La aceasta Lagny răspunsă îndată: „144". Invers, s'ar putea prin acest procedeu, să se constate moartea calculatorilor. In urma aplicărei unui asemenea procedeu lui Monge, să perdu orice speranţă pentru el şi-i se prezisă moartea. El nu tresări de loc, când i să cântă „Marseillaise"-a.

M. V.

BIBLIOGRAFIE

„Gazeta Matematică anul XXVII, No. 10, Iunie 1922, Rezultatul concursului „Gazetei Matematice" *G. Ţiţeica.* Asupra unei hiperbole echilatere importante în legătură cu triunghiul, de Ing. *M. Nicolau.* Note matematice de I. Ionescu, Ştefan S. Mihăilescu, Octav Onicescu şi N. Georgescu-R. Chestiuni de Examen dela Şcoala de Topometrie de pe lângă Direcţia Cadastrului. Cereri, Diverse, Probleme rezolvate, Exerciţii şi Probleme propuse.

Buletinul Societăţii Politechnice anul XXVI, No. 1—3 1922, cuprinde un articol interesant a d-lui Ing. Inspector General I. Ionescu: „Lucrările publice la Romani sub Impăratul Traian". Un arrticol al d-lui V. Stoica despre „Circulaţia maşinilor grele pe liniile căilor ferate române". Articole de specialitate a d-lor I. Dobrescu şi I. Constantinescu, Note.

NOTE MATEMATICE

Asupra problemei 84 (pag. 40). Această problemă se găseşte enunţată sub următoarea formă în Tratatul de Geometrie al d-lor *Rouché* et *de Comberousse*),* fără ca prin aceasta să mă gândesc că isvorul ei a fost luat de acolo de propunătorul problemei în Revista Matematică:

„Dacă se iau succesiv pe cele trei laturi BC, „CA, AB *ale unui triunghiu* ABC, *trei puncte* α, „β, γ *astfel ca să avem*

$$(\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2) + (\overline{C\beta}^2 - \overline{A\beta}^2) + (\overline{A\gamma}^2 - \overline{B\gamma}^2) = 0, \quad (1)$$

„perpendicularele ridicate prin aceste puncte pe „laturile triunghiului concură într'un acelaş punct".

Dacă în relaţia (1) transformăm diferenţele de patrate în produse, ea se poate scrie succesiv

$$(B\alpha + C\alpha)(B\alpha - C\alpha) + (C\beta + A\beta)(C\beta - A\beta) + (A\gamma + B\gamma)(A\gamma - B\gamma) = 0,$$

$$a(B\alpha - C\alpha) + b(C\beta - A\beta) + c(A\gamma - B\gamma) = 0,$$

sub care formă nu e decât problema 84.

De altfel la demonstrarea problemei 84 s'a trecut prin forma (1).

Această problemă este importantă prin aplicaţiile sale, căci cu ajutorul ei se pot demonstra uşor următoarele proprietăţi:**)

1°. Că perpendicularele ridicate prin mijloacele laturilor unui triunghiu se întâlnesc într'un acelaş punct şi de asemenea cele trei înălţimi, precum şi perpendicularele duse pe laturile triunghiului prin punctele de contact ale cercurilor ex-înscrise.

2°. Cu ajutorul ei se poate demonstra teorema fundamentală a triunghiurilor ortologice.

V. CRISTESCU.

*) *E. Rouché* et *Gh. de Comberousse, Traité de Géométrie,* sixième édition, *Géométrie plane.* p. 379. problema 254.

**) *Ibidem* problema 255.

O propoziţiune de aritmetică.

Nu există în niciun sistem de numeraţie două numere de câte trei cifre unul răsturnatul celuilalt astfel ca suma lor să dea un număr cu patru cifre identice.

Fie abc, cba cele două numere în sistemul cu baza B. Conform enunţului va trebui să avem:

$$aB^2+bB+c+cB^2+bB+a=dB^3+dB^2+dB+d$$

d fiind de o singură cifră.

De aci rezultă succesiv:

$$(a+c)B^2+2bB+a+c=d(B^3+B^2+B+1)$$

$$\therefore\ (a+c)(B^2+1)=a[B(B^2+1)+B^2+1]-2bB$$

$$\therefore\ a+c=a(B+1)-\frac{2bB}{B^2+1} \qquad (1)$$

Dar, 2 şi B fiind primi respectiv cu B^2+1, va trebui ca B^2+1 să dividă pe b dar acest lucru este imposibil de oarece $b<B$, a fortiori

$$b<B^2+1.$$

Relaţia (1) fiind imposibilă în numere întregi va fi la fel şi cu aceia dela care am plecat.

Observare. Propoziţiunea analoagă péntru cazul numerilor de două cifre face obiectul problemei 2548. Gazeta Matematică.

A. Th Nicolau
Student Bucureşti

Asupra câtorva derivate de ordinul al n^{lea}.

Sunt cunoscute egalităţile din Trigonometrie:

$$\sin\alpha x.\sin\beta x=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)x-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)x$$

$$\cos\alpha x.\cos\beta x=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)x+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)x$$

$$\sin\alpha x.\cos\beta x=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)x+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)x$$

Faptul că produsele de doi factori din membrul întâi al egalităţilor citate se poate descompune în suma sau diferenţa a două linii trigonometrice simple, apoi, faptul că derivatele de ordinul al n^{lea} al acestor linii se găsesc uşor, conduce numai decât la înlăturarea formulei lui *Leibnitz*.

$$d^n(uv)=vd^nu+C_n^1dvd^{n-1}u+\ldots$$
$$\ldots+C_n^kd^kvd^{n-k}u+\ldots+(d^nv)u.$$

cerută de forma lor însăşi la căutarea derivatelor de ordinul al n^{lea}.

Intr'adevăr având în vedere:

$$\frac{d^n\sin x}{dx^n}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \frac{d^n\cos\alpha}{dx^n}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

rezultă pentru derivatele de ordinul al n^{lea} a funcţiunilor citate:

$$\frac{d^n}{dx^n}.\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^n\cos\left[(\alpha-\beta)x+\frac{n\pi}{2}\right]-$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos\left[(\alpha+\beta)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^n\cos\left[(\alpha-\beta)x+\frac{n\pi}{2}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos\left[(\alpha+\beta)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos\alpha x.\cos\beta x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\sin\left[(\alpha+\beta)x+\frac{n\pi}{2}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^n\sin\left[(\alpha-\beta)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

A. Nicolau
student

Asupra problemei 78.

Fac observaţia că înainte de a afirma că minimul expresiunii E are loc când cei trei factori ce compun sunt egali, trebuia demonstrat că aceşti factori sunt pozitivi.

Intr'adevăr punând expresiunea E sub forma

$$E=\frac{b(p-b)}{c(p-c)}+\frac{c(p-c)}{a(p-a)}+\frac{a(p-a)}{b(p-b)}$$

reese clar că factorii ce o compun sunt pozitivi, a, b, c, $p-a$, $p-b$, $p-c$, fiind cantităţi pozitive.

Ion I. Iliescu
cl. VII R. „V. Alexandri"

Asupra problemei 66.

Observ că limita expresiunei

$$U=\lim_{n=\infty}\frac{(n+1)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)^{\frac{7}{3}}-n^{\frac{7}{3}}}$$

să poate găsi mai uşor punând-o sub forma,

$$U = \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)^{\frac{7}{3}}}{(n+1)^{\frac{7}{3}}\left(1 - \frac{n^{\frac{7}{3}}}{(n+1)^{\frac{7}{3}}}\right)} =$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}(n+1)\left(1 - \frac{n^{\frac{7}{3}}}{(n+1)^{\frac{7}{3}}}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{n=\infty} \frac{1 - \frac{n^{\frac{7}{3}}}{(n+1)^{\frac{7}{3}}}}{\frac{1}{n+1}}}$$

Dar după regula lui Hôpital

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 - \frac{n^{\frac{7}{3}}}{(n+1)^{\frac{7}{3}}}}{\frac{1}{n+1}} =$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{-\frac{7}{3}\,\frac{n^{\frac{7}{3}-1}(n+1)^{\frac{7}{3}} - (n+1)^{\frac{7}{3}-1} n^{\frac{7}{3}}}{(n+1)^{2\cdot\frac{7}{3}}}}{-\frac{1}{(n+1)^2}} =$$

$$\frac{7}{3} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{n^{\frac{7}{3}-1}(n+1)^{\frac{7}{3}-1}(n+1-n)}{(n+1)^{2\cdot\frac{7}{3}}} \cdot \frac{(n+1)^2}{1} =$$

$$\frac{7}{3} \lim_{n=\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3}$$

Deci $u = \dfrac{1}{\frac{7}{3}} = \dfrac{3}{7}$

ION I. ILIESCU
cl VII R. "V Alexandri"

D-l Miron Niculescu dă în No. 9 al revistei o demonstraţie reciprocei teoremei lui Pappus spunând că n'a găsit-o enunţată nicăeri. Aceiaşi problemă e tratată însă pe două căi, dintre care una analoagă cu cea urmată de d-lui, în Gazeta Matematică Vol. XIV pag. 87.

ION I. ILIESCU

Asupra formulei binomului.

Fie polinomul

$$f(x) \equiv (1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\ldots(1+a^nx) \quad (1)$$

Înlocuim x prin ax:

$$f(ax) \equiv (1+a^2x)(1+a^3x)\ldots(1+a^nx)(1+a^{n+1}x)$$

Împărţim această egalitate prin precedenta, obţinem:

$$(1+a^{n+1}x)\,f(x) \equiv (1+ax)\,f(ax) \qquad (2)$$

Produsul $f(x)$ va fi un polinom de gradul n cu termenul liber 1. Insemnăm:

$$f(x) \equiv 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_px^p + \ldots + A_nx^n \quad (3)$$

Vom avea

$$f(ax) \equiv 1 + A_1ax + A_2a^2x^2 + \ldots + A_pa^px^p + \ldots + A_na^nx_n$$

Să înlocuim aceste valori ale lui $f(x)$ şi $f(ax)$ în (2), avem:

$$(1+a^{n+1}x)(1+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{p+1}x^{p-1}+$$
$$A_px^p+\ldots+A_nx^n) \equiv (1+ax)(1+A_1ax+A_2a^2x^2+\ldots$$
$$\ldots+A_{p-}a^{p-1}x^{p-}+A_pa^px^p+\ldots+A_na^nx^n)$$

Să scrim că coeficenţii lui x^p din ambii membri sunt egali; vom avea (observând că termenii în x^p provin din produsul termenilor de grad 1 şi 0 din factorul de gradul întâi cu termenii respectiv de gradul $p-1$ şi p din factorul de grad n):

$$A_p + A_{p-1}a^{n+1} = A_pa^p + A_{p-1}\,.\,a^p$$

de unde

$$A_p = a^p\,\frac{a^{n-p+1}+1}{a^p-1}\,.\,A_{p-1}$$

Insemn pentru prescurtare

$$\varphi_p(a) = \frac{a^{n-p+1}-1}{a^p-1} = \frac{a^{n-p}+a^{n-p-1}+\ldots+a+1}{a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+a+1} \quad (1)$$

Vom avea

$$A_p = a^p\varphi_p(a)\,.\,A_{p-1}$$

Făcând $p_1 = 1, 2, 3, \ldots p$, obținem:

$$A_1 = a\,\varphi_1(a). \qquad (A_0 = 1)$$
$$A_2 = a^2 \cdot \varphi_2(a).\, A_1$$
$$A_3 = a^3 \varphi_3(a)\, A_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{p-1} = a^{p-1}\varphi_{p-1}(a)\, A_{p-2}$$
$$A_p = a^p \varphi_p(a)\, A_{p-1}$$

Inmulțind aceste egalități membru cu membru și ținând seama că $1+2+3+\ldots+p = \frac{p(p+1)}{2}$ căpătăm:

$$A_p = a^{\frac{p(p+1)}{2}} \cdot \varphi_1(a)\,\varphi_2(a)\ldots\varphi_p(a). \quad (p = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Polinomul $f(x)$ va fi deci determinat de relațiunea:

$$f(x) \equiv (1+ax)(1+a^2x)\ldots(1+a^nx) \equiv$$
$$\equiv 1 + a\varphi_1(a)\,.x + a^2\varphi_1(a)\varphi_2(a)\,x^2 + \ldots$$
$$\ldots + a^{\frac{p(p+1)}{2}}\varphi_1(a)\varphi_2(a)\ldots\varphi_p(a)\,x^p + \ldots$$
$$\ldots + a^{\frac{n(n+1)}{2}}\varphi_1(a)\varphi_2(a)\ldots\varphi_n(a)\,x^n. \qquad (5)$$

Dacă facem $a = 1$ relațiunile (5) și (4) devin:

$$(1+x)^n = 1 + \varphi_1(1)\,.\,x + \varphi_1(1)\,.\,\varphi_2(1)\,.\,x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_1(1)\varphi_2(1)\ldots\varphi_p(1)\,.\,x^p + \ldots + \varphi_1(1)\varphi_2(1)\ldots\varphi_n(1)x^n$$
$$\varphi_p(1) = \frac{n-p+1}{p} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots n)$$

și deci:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}\,.\,x + \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)}{2}\,.\,x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)}{3}\ldots\frac{(n-p+1)}{p}\,x^p + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)}{3}\ldots\frac{1}{n}\,.\,x^n$$

Dacă în această formulă înlocuim x prin $\frac{x}{a}$ și înmulțim prin a^n obținem formula binomului sub forma obișnuită:

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}\,a^{n-p}x^p + \ldots + x^n.$$

MAIOR O. BUGEANU

Asupra problemei 84.

Punctul V nu e condiționat de nimic pentruca să rămână în planul triunghiului. Demonstrația rămânând aceiași, problema se poate enunța mai general astfel:

„Dacă V este un punct oarecare față de un triunghiu ABC și m, n, p, r, s segmentele determinate de proecțiile punctului V pe laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ avem relația:

$$\Sigma a\,(m-n).$$

A. Th. NICOLAU
Student București

PROBLEME PROPUSE

142. — Să se găsească un număr știind că suma numerelor prime cu el și inferioare lui este 471744.

I. N. GEORGESCU-VAL

143. — Se consideră primii m multipli de n și se fac produsele două câte două, în toate modurile posibile, a acestor numere. Să se găsească suma acestor produse. Aplicație pentru $n = 12$.

N. GEORGESCU-ROEGEN

144. — Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}} = \sqrt{2}\,.\,(\sqrt{3}+1)$$

CAROL MORWAY

145. — Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + 3x + 1 = 2x^2(x+1).$$

LOCOT. GRIGORE ZAPAN

146. — Să se afle natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^3}$$

A. Th. Nicolau

147. — Să se studieze variația funcțiunei:

$$y = \begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 6 & x & 3+x \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Ion S. Antoniu

148. — Se consideră un punct P mobil pe cercul O, care are proecția sa P′ pe diametrul fix AB. Se duce PP_1 paralelă la AB, care taie cercul în P_1. Cari sunt locurile geometrice descrise de intersecțiile dreptei OP cu dreptele P_1N și P_1Q; N și Q fiind două puncte cari împart respectiv segmentele PP′ și OP′ într'un același raport.

I. M. Serbanescu

149. — Se dă un triunghiu ABC dreptunghic în A. Se duce înălțimea AA′. Bisectoarele unghiurilor din A′ tae laturile opuse în U și V. Bisectoarea interioară a unghiului B tae pe A′V în D, iar bisectoarea exterioară în E. Toț astfel bisectoarele unghiului C tae pe A′U respectiv în F și G. Să se arate că dreptele DF și EG sunt paralele, iar dreptele EF și DG se tae pe mijlocul lui UV.

Tiberiu Popovici.

150. — Fie ABC un triunghiu oarecare, H_a, H_b, H_c, picioarele înălțimilor relative la BC, CA, AB. Se ia pe BC un punct astfel ca să avem:

$$\overline{BH_c^2} = \overline{BH_a} \times \overline{BD}.$$

In mod analog obținem punctele E și F respectiv pe AC și AB. Fie P, R, S intersecțiile:

$$(H_cD, H_aE),\ (H_cD, H_bF),\ (H_aE, H_bF).$$

Să se arate că dreptele AP, BS, CR sunt concurente.

Alexandru Niculescu

151. — Să se afle derivata funcțiunei:

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

Pincu Katz.

152. — Să se demonstreze că în orice triunghiu există relațiunea:

$$\frac{1}{S} = \frac{\operatorname{ctg} A}{h_a^2} + \frac{\operatorname{ctg} B}{h_b^2} + \frac{\operatorname{ctg} C}{h_c^2}$$

M. Sarian

153. — Se împart laturile CA, AB ale unui triunghiu ABC, în același sens, în același raport K, prin punctele M, N. Dacă P e un punct fix al planului, care e locul centrului de gravitate ale triunghiului MNP, când K variază?

Miron Niculescu.

154. — Intr'o fabrică de zahăr se utilizează ca combustibil gazul natural. Considerându-l format numai din metan și ținând seama de următoarele date:

Puterea calorifică a metanului pe kgr. este 13318 *c*.

Căldura lantentă de vaporizare a apei este 537 *c*.

Volumul vaporilor de apă e de 1650 ori mai mare că al lichidului din care au provenit.

Greutățile atomice:

$$C = 12,\ H = 1,\ O = 17,\ N = 14.$$

Aerul e format din N + O în proporția gravimetrică $N = 77\%$; $O = 23\%$.

Să se determine:

1°. Densitatea metanului la 15° *c*. și la $760^m|_m$.

2°. Cantitatea de metan socotită în m^3 la 15° și $760^m|_m$, necesară arderii, ca să se obțină prin fierbere în cazane 100 m^3 vapori de apă, știind că temperatura inițială a apei este de 15° *c*., iar randementul de utilizare a căldurii de ardere la evaporare este 0.8.

3°. Cantitatea de aer în kgr. necesară întreținerei arderei întregei cantități de metan.

C. Stefanescu

INFORMATIUNI

In No. 10 al „Gazetei Matematice“ din București s'a dat rezultatul concursului, pe care această Revistă, l'a ținut între colaboratorii săi mai buni, în vacanța de Paști.

In ordinea clasificației, au răușit următorii domni:

1. *M. Sarian* cl. VIII liceul din Constanța.
2. *N. Georgescu-Roegen* liceul Militar „M-rea Dealul“.
   B. Barbălat cl. V liceul din Bârlad.
3. *N. I. Ciorănescu* cl. VIII liceul „Spiru-Haret“ București.
4. *Emil Ștefănescu* cl. VI liceul „Spiru-Haret“ București.
5. *A. Popeanu* cl. VII liceul din Constanța.
6. *G. Jujescu* cl. VIII liceul Național Iași.
7. *F. Negretzu* Pitești, *I. Florescu* Craiova, *G. Popescu* liceul Internat Iași.

Menționi speciale au avut domnii:

A. Fințescu, C. E. Georgescu, B. D. Niculescu, I. Antoniu, M. Grünbaum, R. Fajon, Al. Solomon, W. Solomon.

Din această listă, un număr foarte mic, nu sunt colaboratori și a Revistei noastre, toți ceilalți fiind. Rezultatul frumos pe care sora noastră mai mare din București îl anunță, ne bucură și pe noi și la rândul nostru, felicităm reușitii de mai sus, îndemnându-i tot mai mult la muncă, curată, frumoasă și cinstită. Ca colaboratori ai noștri, Revista noastră a avut prilejul, să constate în diferite rânduri meritele deosebite a numiților premianți și le face urările să continue mai departe ca colaboratori, munca pe care au început'o

——

Ca „Revistă Matematică“ din noile ținuturi unite cu patria mumă, pentru care Revista noastră a apărut, regretăm și noi, alături de d-l profesor G. Țițeica, că nici un colaborator din aceste noi ținuturi nu a luat parte la concursul „Gazetei Matematice“, cu toate silințele noastre de a căuta să întindem tot mai mult gustul de colaborare la acest fel de Reviste. Avem însă convingerea, că în curând, vom putea menționa colaboratori de valoare și din noile ținuturi.

——

Față de rezultatul, căpătat anul acesta, la concursul „Gazetei Matematice“ din București, că nici un elev din noile ținuturi nu s'a prezentat la acest concurs, și față de faptul că numărul acestor fel de elevi, ca colaboratori la Revista noastră Matematică, este foarte mic, aproape neînsemnat, Revista fiind scoasă tocmai pentru ei, ne vedem nevoiți a face apel — pe această cale — la d-nii profesori respectivi de Matematici, dela toate liceele din noile ținuturi să binevoiască, a întinde tot mai mult gustul de colaborare, între elevii dumnealor, la acest fel de Reviste—și va contribui astfel cu o oră mai înainte, la desvoltarea gustului tinerilor noastre generații, către științele pure și aplicate, care au toate la bază matematicele, pentru a avea în viitor, bune elemente pentru desvoltarea industriei și comerțului nostru, prin noi înșine,

——

La 16 Iulie a. c., va avea loc la Timișoara, întrunirea comitetului de aranjare a congresului A. G. I. R-lui *) la care va lua parte, în special d-l *I. D. Teodor*, Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului, cassier și membru în comitetul de conducere a „Gazetei Matematice“ din București, profesor la Școala Politechnică din București, d-l Inginer *Const. Bușilă* prefesor la Școala Politechnică din București și Președinte al Biroului A. G. I. R-lui pe anul 1922, d-l Inginer *Stan Vidrighin* primarul orașului Timișoara, d-l Inginer *Mardan* Directorul Manufacturei de Tutun loco,d-l Inginer *C. Teodorescu* Subdirectorul Școalei Politechnice Timișoara, d-l Inginer *Gold Haret* Director în Ministerul Lucrărilor Publice și alții.

——

Elevii liceului *„Dragoș-Vodă“* din Câmpulungul moldovenesc (Bucovina) s'au strâns în jurul unei *Societăți a Iubitorilor de matematici și fizică.* Societatea este pusă sub președenția d-lui *V. Cârdeiu*, profesor la acest liceu, iar secretar este unul din harnicii noștri corespondenți d-l *Mehlmann Teodor.*

Felicităm pe tinerii noștrii corespondenți pentru entusiasmul cu care contribuesc la desvoltarea culturei matematice în provinciile unite și-i asigurăm de tot concursul nostru. Și cu această ocazie rugăm pe colaboratorii și corespondenții noștri care au bunăvoință de a dona cărți pentru biblioteca Societății să le trimeată pe adresa secretarului.

*) Care va avea loc toamna aceasta la Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMISOARA.

ANUL II. 15 AUGUST 1922. No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. GRIGORE ZAPAN. RELATIUNI INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU.
2. PROBLEME REZOLVATE.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. NOTE MATEMATICE.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1 9 2 2

Avem plăcerea a anunța corespodenților noștri că din Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timișoara face parte și d-nul **V. Cârdeiu,** profesor la liceul din Câmpulungul moldovenesc (Bucovina).

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **Ing. M. Vasiliu** sub-directorul Fabricei de Tutun, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL II. — No. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1922

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Inginer M. VASILIU, Fabrica de Tutun, Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

RELAȚIUNI INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU

de GRIGORE ZAPAN

Intr'un triunghiu oarecare afară de relațiunile ce se stabilesc în mod geometric, se pot obține numeroase relațiuni și pe cale algebrică

Astfel voi arăta cum din identități algebrice putem deduce relațiuni între anumite elemente ale triunghiului.

I. Să considerăm cunoscuta identitate:

$$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2=(x+y)(y+z)(z+x)+4x.y.z$$

unde x, y, z reprezintă numere oarecare.

Dacă în această identitate facem: $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$, a, b, c și p fiind laturile și semiperimetrul unui triunghiu oarecare, obținem:

$$a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)=abc+4(p-a)(p-b)(p-c).$$

Dacă S reprezintă suprafața triunghiului și R raza cercului circumscris, se știe că:

$$abc=4RS \quad \text{și} \quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Deci identitatea de mai sus se mai poate scrie:

$$a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)=4RS+\frac{4S^2}{p}$$

Ținând seamă de egalitățile:

$$S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c=pr$$

r, r_a, r_b, r_c fiind raza cerului înscris și razele cercurilor exînscrise, identitatea noastră, împărțită convenabil cu S, devine:

$$\frac{a^2}{r_a}+\frac{b^2}{r_b}+\frac{c^2}{r_c}=4R+4\frac{S}{p}$$

$$\therefore \frac{a^2}{r_a}+\frac{b^2}{r_b}+\frac{c^2}{r_c}=4(R+r)$$

relațiune remarcabilă.

Dacă însă facem $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, in identitatea considerată, obținem:

$$\frac{1}{r_a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2+\frac{1}{r_b}\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)^2+\frac{1}{r_c}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)^2=\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)+\frac{4}{r_a r_b r_c}$$

și cum în orice triunghiu avem:

$$\frac{2}{h_a}=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}, \quad \frac{2}{h_b}=\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}, \quad \frac{2}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b},$$

h_a, h_b, h_c fiind înălțimile triunghiului, rezultă:

$$\frac{1}{r_a}\cdot\frac{4}{h_a^2}+\frac{1}{r_b}\cdot\frac{4}{h_b^2}+\frac{1}{r_c}\cdot\frac{4}{h_c^2}=\frac{2}{h_a}\cdot\frac{2}{h_b}\cdot\frac{2}{h_c}+\frac{4}{r_a r_b r_c}$$

$$\therefore \frac{1}{r_a h_a^2}+\frac{1}{r_b h_b^2}+\frac{1}{r_c h_c^2}=\frac{2}{h_a h_b h_c}+\frac{1}{r_a r_b r_c}$$

relațiune interesantă, care de altfel se poate obține și din identitatea:

$$a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)=abc+4(p-a)(p-b)(p-c)$$

împărțindu-i ambii membri cu S^3 și ținând seama că:

$$2S=a h_a=b h_b=c h_c \quad \text{și}$$

$$S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c.$$

Tot astfel înlocuind pe x, y și z respectiv prin $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$ căpătăm:

$$\frac{1}{h_a}\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^2+\frac{1}{h_b}\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}\right)^2+\frac{1}{h_c}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}\right)^2=$$
$$\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}\right)+\frac{4}{h_a\,h_b\,h_c},$$

și cum: $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$

rezultă:

$$\frac{1}{h_a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}\right)^2+\frac{1}{h_b}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_b}\right)^2+\frac{1}{h_c}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_c}\right)^2=$$
$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_c}\right)+\frac{4}{h_a\,h_b\,h_c}.$$

II. Să considerăm identitatea:

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=$$
$$(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

Făcând $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, avem:

$$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)+\frac{1}{r_a\,r_b\,r_c}=$$
$$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\left(\frac{1}{r_a r_b}+\frac{1}{r_b r_c}+\frac{1}{r_c r_a}\right)$$

sau:

$$\frac{2}{h_a}\cdot\frac{2}{h_b}\cdot\frac{2}{h_c}+\frac{1}{r_a\,r_b\,r_c}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r_a r_b}+\frac{1}{r_b r_c}+\frac{1}{r_c r_a}\right)$$

$$\therefore\frac{8}{h_a\,h_b\,h_c}+\frac{1}{r_a\,r_b\,r_c}=\frac{r_a+r_b+r_c}{r\,r_a\,r_b\,r_c}$$

relațiune din care se deduce ușor

$p=r_a+r_b+r_c-r.$

Dacă însă facem $x=\frac{1}{h_a}$, $y=\frac{1}{h_b}$, $z=\frac{1}{h_c}$, căpătăm:

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_c}\right)+$$
$$\frac{1}{h_a\,h_b\,h_c}=\frac{h_a+h_b+h_c}{r\,h_a\,h_b\,h_c}$$

III. Să considerăm identitatea:

$$9(x^2+y^2+z^2)=[2(x+y)-z]^2+$$
$$[2(y+z)-x]^2+[2(z+x)-y]^2.$$

Făcând $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, obținem:

$$9\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)=\left(\frac{4}{h_a}-\frac{1}{r_a}\right)^2+$$
$$\left(\frac{4}{h_b}-\frac{1}{r_b}\right)^2+\left(\frac{4}{h_c}-\frac{1}{r_c}\right)^2$$

Făcând $x=\frac{1}{h_a}$, $y=\frac{1}{h_b}$, $z=\frac{1}{h_c}$, obținem:

$$9\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)=\left(\frac{2}{r}-\frac{3}{h_a}\right)^2+$$
$$\left(\frac{2}{r}-\frac{3}{h_b}\right)^2+\left(\frac{2}{r}-\frac{3}{h_c}\right)^2$$

sau încă:

$$9\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)=\left(\frac{2}{r_a}+\frac{1}{h_a}\right)^2+$$
$$\left(\frac{2}{r_b}+\frac{1}{h_b}\right)^2+\left(\frac{2}{r_c}+\frac{1}{h_c}\right)^2$$

IV. Dacă în identitatea:

$$2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2=$$
$$(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4$$

facem $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$ obținem:

$$2\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}-\frac{r_a+r_b+r_c}{r_a r_b r_c}\right)=$$
$$\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)^4+\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}\right)^4+\left(\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_a}\right)^4.$$

V. Dacă în identitatea:

$$8xyz(x+y+z)=2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-$$
$$2(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^4$$

facem $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$ obținem:

$$\frac{8}{r r_a r_b r_c}=2\left(\frac{1}{r_a^4}+\frac{1}{r_b^4}+\frac{1}{r_c^4}\right)^2-\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)^2-$$
$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)+\frac{1}{r^4}$$

VI. Dacă în identitatea:

$$(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3-$$
$$3(x+y)(y+z)(z+x)=2(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

facem $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, cu ajutorul egalităţilor

$$\frac{2}{h_a}=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c},\ \frac{2}{h_b}=\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a},\ \frac{2}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}$$

obţinem curioasa relaţiune:

$$4.\left(\frac{1}{h_a^3}+\frac{1}{h_b^3}+\frac{1}{h_c^3}-\frac{3}{h_a\,h_b\,h_c}\right)=$$
$$\frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}-\frac{3}{r_a\,r_b\,r_c}$$

VII. Dacă în identitatea:

$$12(x^2+y^2+z^2)^2=(x+y+z)^4+(y+z-x)^4+$$
$$(z+x-y)^4+(x+y-z)^4+8(x^4+y^4+z^4)$$

facem $x=\frac{1}{r_a}$. $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, obţinem relaţia:

$$12\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)^2=\frac{1}{r^4}+\left(\frac{2}{h_a}-\frac{1}{r_a}\right)^4+$$
$$\left(\frac{2}{h_b}-\frac{1}{r_b}\right)^4+\left(\frac{2}{h_c}-\frac{1}{r_c}\right)^4+8\left(\frac{1}{r_a^4}+\frac{1}{r_b^4}+\frac{1}{r_c^4}\right)$$

sau încă:

$$12\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)^2=\frac{1}{r^4}+\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{r_a}\right)^4+$$
$$\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{r_b}\right)^4+\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{r_c}\right)^4+8\left(\frac{1}{r_a^4}+\frac{1}{r_b^4}+\frac{1}{r_c^4}\right)$$

VIII. Dacă în identitatea:

$$(x+y)^3(x^5+y^5)+5xy(x+y)^2(x^4+y^4)+$$
$$15x^2y^2(x+y)(x^3+y^3)+35x^3y^3(x^2+y^2)+$$
$$70x^4y^4=(x+y)^8$$

facem $x=\frac{1}{r_b}$ şi $y=\frac{1}{r_c}$, ştiind că $\frac{2}{h_a}=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$ obţinem:

$$\frac{8}{h_a^3}\left(\frac{1}{r_b^5}+\frac{1}{r_c^5}\right)+\frac{20}{r_b\,r_c\,h_a^2}\left(\frac{1}{r_b^4}+\frac{1}{r_c^4}\right)+$$
$$\frac{30}{r_b^2\,r_c^2\,h_a}\left(\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}\right)+\frac{35}{r_b^3\,r_c^3}\left(\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)+\frac{70}{r_b^4\,r_c^4}=\frac{256}{h_a^8}$$

IX. Dacă în identitatea lui Lagrange:

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2=$$
$$(xy'-yx')^2+(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2$$

facem: $x=a$, $y=b$, $z=c$ şi $x'=h_a$, $y'=h_b$, $z'=h_c$, obţinem:

$$(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)-36S^2=$$
$$(ah_b-bh_a)^2+(bh_c-ch_b)^2+(ch_a-ah_c)^2$$

X. In fine dacă în identitatea:

$$\begin{vmatrix}(y+z)^2 & y^2 & z^2\\ x^2 & (z+x)^2 & z^2\\ x^2 & y^2 & (x+y)^2\end{vmatrix}=2xyz(x+y+z)^3$$

facem: $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$ obţinem uşor relaţia:

$$\begin{vmatrix}\frac{4}{h_a^2} & \frac{1}{r_b^2} & \frac{1}{r_c^2}\\ \frac{1}{r_a^2} & \frac{4}{h_b^2} & \frac{1}{r_c^2}\\ \frac{1}{r_a^2} & \frac{1}{r_b^2} & \frac{4}{h_c^2}\end{vmatrix}=\frac{2}{r^3\,r_a\,r_b\,r_c}$$

După cum se vede putem găsi, pe această cale, o sumedenie de relaţiuni între elementele triunghiului. Exemplele de mai sus exprimă relaţiuni între laturi, suprafaţă, înălţimi, sau raze. Se pot găsi însă astfel de relaţii şi între alte elemente ale triunghiului şi aşteptăm în această direcţiune cercetări din partea corespondenţilor.

PROBLEME REZOLVATE

97,—*Fie* ABC *un triunghiu. Se consideră punctele respective pe aceste înălţimi, care le împart la a treia parte începând dela baze. Să se arate că dreptele paralele respectiv la bazele lor, care trec prin aceste trei puncte, sunt trei drepte concurente.*

A. SCODREANU

I. Soluție dată de d-l *Ioan S. Antoniu* cl. VI Mânăstirea Dealului.

Fie AA', BB', CC' înălțimile triunghiului ABC iar dreptele DE, FI și HJ paralelele duse conform problemei. Ele împart laturile triunghiului în segmentele:

$BI = IE = EC$, $AD = DH = HB$ și $AF = FJ = JC$.

Unim D cu I, I cu J și J cu D, și obținem triunghiul DIJ în care avem $IK = KJ$, de oarece în Δ IJC avem: $IE = EC$ și $KE \parallel JC$. Tot astfel demonstrăm că $DL = LI$ și $DM = MJ$. Dreptele DK, JL și IM fiind mediane în triunghiul DIJ sunt concurente.

Au rezolvit-o pe aceiași cale foarte bine d-nii: *Elemer Novotny* Școala Politechnică Timișoara, *Corneliu Săndulescu* Școala Politechnică București, *Huber I.*, *Iorgulescu C.* și *Soceanu E.* lic. „Internat". *Oprișean E.* Bârlad, *Dinulescu E.* și *Măru D.* lic. Galați, *Berdan C.* Bârlad, *Atanasiu D.* „M-rea Dealul". *Bonea I.*

II. Soluție dată de d-l *Șerbănescu I.* cl. VI liceul „Mihai-Viteazul".

Fie α, β, γ punctele ce împart înălțimele h_a, h_b, h_c, în raportul $^1/_3$ începând dela baze. Fiecare din paralele la baze ce trec prin α, β, γ va tăia respectiv medianele m_a, m_b, m_c în raportul $^1/_3$ începând dela baze, conform teoremei lui Thales, și deci fiecare din aceste paralele va trece prin punctul de concurență al medianelor triunghiului ABC, deci vor concura în centrul lui de greutate.

Au rezolvit bine problema în același mod d-nii: *Ioan M. Ioniță* Școala Militară de Artilerie *I. Coșereanu* absolvent al liceului Piatra-Neamț, *M, Gh. Săvescu* clasa VIII lic. „Internat", *A. Sufletel* „M-rea Dealul", *Boju Roșețel* Silistra, *Popovici Th. I.* și *Bușilă A.* lic „Mihai-Viteazul", *Popescu Ștefan* și *Negretzu Fl.* Pitești, *Tiberiu Popoviciu* Arad, E. Iliescu lic. „M-rea Dealul", *Florian Georgescu* București, *Dili Schileru* cl. VII Craiova, *I. St. Teodorescu*, *Puiu Juster*, *Iosif Freifeld*, *Nesteanu Gh.* și *Vasilache S.* „M-rea Dealul", *Ovidiu Popea* Chișinău,

Pe cale analitică au rezolvit-o d-nii: *Miclescu A.* și *I. N. Georgescu-Val* dela Școala de Artilerie.

Pe alte căi d-nii: *Nicolescu* Ploești, *Calleya M.* București, *Ghițescu V.* „Mihai-Viteazul", *Focșeneanu I. M*, D-l *Georgescu-Roegen* consideră tema ca evidentă.

Generalizare făcută de d-l *Florian Georgescu* liceul „Cantemir".

Dreptele paralele respectiv la bazele unui triunghiu, duse prin punctele așezate pe laturi sau pe bisectoare ori — în general — prin punctele așezate pe orice dreaptă care trece prin vârfurile triunghiului și se oprește la latura opusă, sunt concurente în punctul de întâlnire al medianelor, cu condiția ca punctele să fie astfel așezate, încât ele să împartă latura respectivă la a treia parte începând dela bază.

Această generalizare a mai fost enunțată și de d-nii: *Dili Schileru* cl. VII Craiova, *Șerbănescu I.* „Mihai-Viteazul", *Iosif Freifeld* Botoșani și *I. St. Teodorescu.*

D-l *Șerbănescu I.* lic. „Mihai-Viteazul" o extinde și în spațiu, enunțând-o astfel:

Fie un tetraedru ABCD. Se consideră dreptele T_a, T_b, T_c, T_d care unesc un punct al bazei cu vârful opus și se împart aceste drepte respectiv prin punctele α, β, γ, δ în raportul $^1/_4$ începând dela baze. Să se arate că planele ce trec prin α, β, γ, δ și sunt paralele la bazele respective sunt concurente.

D-lui o demonstrează astfel:

Centrul de greutate G al tetraedrului e punctul de concurență al celor 4 drepte ce unesc câte un vârf cu centrul de greutate al bazei opuse: G împarte pe fiecare din aceste drepte în raportul $^1/_4$ începând dela baze.

Planul paralel la bază, care trece prin α, împărțind și dreapta AG_a (G_a fiind centrul de greutate al bazei opuse lui A) în același raport $^1/_4$ începând dela baze conform teoremei lui Thales, va trece prin centrul de greutate G. Asemenea se va întâmpla și cu celelelte 3 plane paralele. Deci toate vor conține pe G, vor fi concurente.

104. — *Notațiunile între elementele unui triunghiu fiind cele obișnuite, să se demonstreze relațiunea:*

$$S = r^2\left(\frac{r_b + r_c}{a} + \frac{r_c + r_a}{b} + \frac{r_a + r_b}{c}\right)$$

GH. D. POPESCU

1°. Soluțiune dată de d-l *Mircea Bobârnac* student București.

Inlocuind pe r, r_a, r_b, r_c, respectiv prin $\frac{s}{p}$, $\frac{s}{p-a}$, $\frac{s}{p-b}$, $\frac{s}{p-c}$, obținem succesiv:

$$S=\frac{s^2}{p^2}\left[\frac{\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}}{a}+\frac{\frac{s}{p-c}+\frac{s}{p-a}}{b}+\frac{\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}}{c}\right]$$

$$=\frac{s^3}{p^2}\left[\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-c)(p-b)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right]$$

$$=\frac{s^3}{p^2}\frac{3p-(a+b+c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{s^3}{p^2}\cdot p\cdot\frac{p}{s^2}=s$$

ţinând seamă că $s^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$ aşa fel că relaţia considerată să reduce la o identitate.

Au dat astfel de soluţii şi d-nii: *Cristea P. Goilav* student, *Ioniţă M. Ion* şi *Andrei Miclescu* Şcoala Militară de Artilerie Timişoara, *Em. V. Soceanu*, *Octav Ulman*, *M. Gh. Săvescu* şi *Const. Iorgulescu* absolvenţi lic. „Internat" Iaşi, *Nicu D. Mucichescu* cl. VIII Craiova, *Stoenescu I. Alexandru* cl. VIII Bucureşti, *N. Chelsoi* cl. VIII Piatra-Neamţ, *Mihăescu D. Constantin* Giurgiu, *Ion I. Iliescu* Galaţi, *Ion S. Antoniu*, *Brătescu H. Mihail* R.-Vâlcea, *Propst A Jean* T.-Severin, *Măru Dumitru* Galaţi, *Const. E. Georgescu* Bucureşti, *Pincu Katz* Galaţi, *Sufleţel P. Aurel*, *Dinulescu N. Nicolae* Galaţi, *Constantinescu M. Mihail* Bucureşti, *Stamatiu I. Mihai* Piteşti, *M. Cocorandu* cl. VII Braşov, *Emil Bercovici*, *Ştefan Solacolu* Bucureşti, *Nicuţă St. Theodoru* Huşi, *Eugen Ionică* cl. VII Braşov. *Samovici Isidor* Focşani, *Isaiia Nicolescu* Ploeşti, *Ernest*, *Gh. Oprişanu* Bârlad, toţi din clasa VII liceală

Din clasa VI liceală au rezolvit tot asemenea şi d-nii următori:

Calleya M. Bucureşti, *I. D. Vasilescu* liceul „Internat" Iaşi, *Bogdan P. Martinian* Caracal, *Popa I. Teodor* Spiru-Haret Bucureşti, *Al. Pamula* Botoşani, *Alex. Tauber* Botoşani, *Amărăscu O. Gavril* şi *Ionescu I. Ilie* Caracal, *Florian Er. Georgescu* „Cantemir-Vodă" Bucureşti, *Virgiliu Ghiţescu* „Mihai-Viteazul" Bucureşti. *Valeriu S. Stamatescu* S. P. U. Bucureşti, *Dragomirescu N. Ioan* „Cantemir-Vodă" Bucureşti, *Ţenea N. Ioan* Caracal, *Samoilă Dumitru* Câmpina, *Arcadian P. Nicolae* Caracal, *Ioan B. Ionescu* Piteşti, *Silion Gh. Ion* Câmpina, *Lăzărescu Fl. Ştefan* Giurgiu, *Al. Brăileanu* Constanţa, *Constantinescu Ion*, *Stănciulescu A. Gheorghe* Piteşti, *Moroianu Al.* Constanţa, *Tiberiu Popoviciu* liceul „Moise Nicoară" Arad, *E. Iliescu*, *Dragomirescu G. Ion* Piteşti, *Focşăneanu I. M.* Târgovişte, *Ion Lăzărescu* Piteşti, *Popescu N. Ştefan*, *Popa I. Teodor* „Spiru-Haret" Bucureşti, *Solomon Alfred* „Matei-Basarab" Bucureşti, *Geandu Ion* liceul "Internat" Iaşi, *Ion Th. Popovici* „Mihai-Viteazul" Bucureşti, *Ion M. Şerbănescu* Bucureşti, *Macri Socrate*, Botoşani, *Stoenescu Al. I.* Bucureşti, *Vincenţiu Giotta* Bârlad, *Florea Negretzu* Piteşti, *Andrei I. Zamfirescu* „Spiru-Haret" Bucureşti, *Adrian Buşilă* „Mihai-Viteazul" Bucureşti, *Emil Ştefănescu* Bucureşti şi *Const. Berdan* Bârlad.

Din cl. V liceală, au rezolvit problema şi d-nii: *Solomon Wilhelm* liceul „Matei-Basarab" Bucureşti, *Solacolu C. Şerban* „Matei-Basarab" Bucureşti, *Gabrielescu C. Vasile* liceul „N. Bălcescu" Brăila şi *Ovidiu Gh. Popea* Chişinău.

Precum şi d-nii: *Eugeniu I. Scoruşeanu* Bucureşti, *Cr. Rigani* Constanţa, *Gh. N. Melinte*, *Cazanacli Petre* Iaşi-*Bonea Ioan*, *Vasile Dan* Galaţi, *Gh. Stancu* Focşani, *Ili. uţă Prundeanu* Drăgăneşti-Olt şi *Puiu Juster* P.-Neamţ,

2°. — Soluţie dată de d-l *Ioniţă M. Ioan* Şcoala Militară de Artilerie Timişoara.

Plecăm dela relaţia $S=pr$ pe care înmulţind-o cu $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$ găsim:

$$\frac{s}{r}=pr\left[\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right]$$

care la rândul ei ţinând seamă de relaţiunile (G. M. No. 10, 1921):

$$a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{p},\quad b=\frac{r_b(r_a+r_c)}{p},\quad c=\frac{r_c(r_a+r_b)}{p}$$

obţinem

$$S=r^2\left(\frac{r_b+r_c}{a}+\frac{r_c+r_a}{b}+\frac{r_a+r_b}{c}\right)$$

care este tocmai relaţiunea de demonstrat.

Au mai rezolvit tot astfel problema şi d-nii: *Dragomirescu-Buzne Eduard* Şcoala Militară de Artilerie Timişoara, *Traian A. Dordea* cl. VII liceul militar „M-rea Dealul" Târgovişte, *Scodreanu Alexandru* cl. VI liceul „Durostor" Silistra, *Georgescu C. Ion* cl. VI Piteşti, *Alex. Tauber* cl. VI Botoşani şi *I. Rizescu* Constanţa.

3°. Soluţie trigonometrică dată de d-l *I. N. Georgescu-Val* Şcoala Militară de Artilerie Timişoara.

In „Gazeta Matematică" vol. XXVI, pag. 212, găsim relaţiile:

$$r_b+r_c=a\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\quad r_c+r_a=b\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

$$r_a+r_b=c\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

din care împărţindu-le respectiv prin a, b, c şi adunându-le obţinem:

$$\frac{r_b+r_c}{a}+\frac{r_c+r_a}{b}+\frac{r_a+r_b}{c}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

însă să ştie că avem:

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{cot}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p^2}{s}$$

pe care înlocuind-o în precedenta și înmulțind cu r^2, obținem tocmai relația cerută de arătat.

Au mai rezolvit problema la fel și d-nii: *Cristea P. Goilav* student București, *Gogălniceanu M. Mihail* Brăila, *Ion O. Huber* cl. VIII particulară, *Dili C. Schileru* cl. VII Craiova, *Nicu A. Stănescu* Craiova, *Al. Brăileanu* cl. VI Constanța, *Ion Coșereanu* Piatra-Neamț, *I. St. Teodorescu* Ploești, *Florea Negretzu* cl. VI Pitești, *Mocanu N. Aurel* cl. VII Huși.

4°. Soluție dată de d-l *Stoenescu Al. I.* liceul „Cantemir-Vodă" București.

Plecăm dela egalitatea:

$$(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)=bc(r_b+r_c)+ac(r_a+r_c)+ab(r_a+r_b)$$

de unde, prin împărțire cu abc, obținem:

$$\frac{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)}{abc}=\frac{r_b+r_c}{a}+\frac{r_c+r_a}{b}+\frac{r_a+r_b}{c}$$

Insă din „Culegere de Probleme" Cap. XIX. 19, avem următoarea relațiune:

$$S=r^2\frac{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)}{abc}$$

în care ținând seama de relația precedentă, căpătăm tocmai relația cerută.

Observare. D-l *Mircea Gh. Săvescu* liceul „Internat" Iași, arată că în mod analog, mai putem avea încă relațiunea:

$$S=r^2\left(\frac{r_b+r_c}{a}\cdot\frac{r_c+r_a}{b}\cdot\frac{r_a+r_b}{c}\right)$$

și deci și relația

$$\frac{r_b+r_c}{a}+\frac{r_c+r_a}{b}+\frac{r_a+r_c}{c}=\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_c)}{abc}\qquad(1)$$

dedusă din ambele precedente.

Cele observate până aci, se pot aplica și relațiunei:

$$S=r^2\left[\frac{r_b-r_c}{b-c}+\frac{r_c-r_a}{c-a}+\frac{r_a-r_c}{a-c}\right]$$

care este și ea adevărată, obținându-se la fel, o relație (1),

Notă. S'au primit încă două soluții neiscălite.

M. V

106. — *Se unește un punct fix* A *al unui cerc* O *cu un alt punct mobil al său* P *și să ia pe prelungirea lui* AP *un segment* AP = PB. *Să se afle locul geometric al intersecției razei* OP *cu perpendiculara dusă în* B *la dreapta* APB.

M. VASILIU

1°. Soluțiune dată de d-l *N. Dospinoiu*, conductor de lucrări publice jud. Fălciu.

Ducem diametrul AOD și unim P cu D. Triunghiul APD fiind dreptunghic în P, iar unghiurile CPB, APO și PAO fiind egale rezultă că triunghiurile PBC și APD sunt egale și dar PC = AD = = diametru = C^t.

Deci locul geometric căutat este un cerc concentric, cu cercul dat, având de rază, de 3 ori raza cercului dat.

Au dat soluțiuni bune d-nii: *Andrei Miclescu, Ioan M. Ioniță* și *I. N. Georgescu-Val* Școala Militară de Artilerie Timișoara, *Em. V. Soceanu, M. Gh. Săvescu* liceul „Internat" Iași, *Stoenescu I. Alexandru, Crăiniceanu Gheorghe* Timișoara, *Tuducescu A. Nicolau, Iosif Freifeld, Virgiliu Ghițescu, M. Cocorandu* Brașov, *Mocanu I. Aurel, Nicuță St. Theodoru* Huși, *Sufletel P. Aurel* lic. militar „M-rea Dealul" Târgoviște, *Const. E. Georgescu* București, *I. St. Teodorescu* Ploești, *Dinulescu N. Nicolae* Galați, *Dili C. Schileru* Craiova, *Măru Dumitru* Galați, *Ion S. Antoniu* liceul militar „M-rea Dealul", *Ioan I. Iliescu, Const. Chiorescu* Botoșani, *Grigore C. Gianni, Gh. I. Sorescu* București, *Stamatiu M.* Pitești, *Cr. Rigani* Constanța, *Rosețel Boju, Gr. C. Moisil* București, *Ion Coșereanu* P.-Neamț, *Eugen I. Scoruțianu* București, *Puiu Juster* P.-Neamț, *A. Scodreanu* Silistra, *Bogdan P. Martinian* Caracal, *Solomon Alfred* București, *Florian Er. Georgescu, Valeriu I. Stamatescu* București, *Vincențiu Giotta* Bârlad, *Constantinescu Ion* liceul militar „M-rea Dealul", *Tiberiu Popovici* Arad, *Silion Gh. Ion* Câmpina, *Stănciulescu A. Gheorghe, Ioan B. Ionescu* Pitești, *G. Iliescu* liceul militar „M-rea Dealul", *Dragomirescu Gh. Ioan* Pitești, *Dragomir N. Ion, I. M. Focșeneanu* Târgoviște, *Bușilă Adrian* București, *E. Iliescu* liceul militar „M-rea Dealul", *C. Berdan* Bârlad, *Stoenescu Al. I.* București, *Florea Negretzu* Pitești, *Andrei I. Zamfirescu* București, *Popescu N. Ștefan* Pitești, *M. I. Șerbănescu, Alexandru Niculescu* București, *Segal S., I. D. Atanasiu* Huși, *Bănărescu A. Lucrețiu, Solomon Wilhelm, Vasiliu D. Virgiliu* Constanța, *Bonea Ioan.*

Observare. Mulți din corespondenții noștri, au tratat chestiunea mai general, considerând că PB = m.AP și-au găsit, că și în acest caz, locul

geometric căutat este un cerc concentric cu cercul dat și având de rază pe $(2m+1)$ R.

Între acești corespondenți, indicăm pe d-nii: *I. N. Georgescu-Val N. Dospinoiu, Dili C. Schileru, I. M. Șerbănescu, Stoenescu Al. I., Constantin Berdan, A. Scodreanu, Roșețel Boju* și *Ion I. Iliescu.*

D-l *I. M. Șerbănescu* cl. VI liceul „Mihai-Viteazul" București, demonstrează câteva proprietăți interesante a unora din elementele problemei de față.

Astfel 1°. — Centrul de greutate al triunghiului format de dreptele APB, OP, IB (IB perpendiculara pe APB și I intersecția ei cu raza OP), descrie un cerc omotetic cu cercul dat, față de punctul K, centrul de greutate al triunghiului AP P' (P' diametrul opus lui P).

2°. Intersecția I' a dreptelor OB și AP' descrie de asemenea un cerc omotetic cu O, raportul de omotetie fiind $n+2$, unde $n=\frac{1}{m}$ din notația precedentă, iar punctul de referință fiind A.

3°. Perpendiculara în B la APB trece totdeauna printr'un punct fix, care este intersecția ei, cu diametrul fix OA.

Soluție foarte bună analitică, a dat d-l *I. N. Georgescu-Val* Școala militară de Artilerie Timișoara.

111. — *Să se găsească forma numerelor, care sunt în acelaș timp și patrate și cuburi perfecte.*

E. ILIESCU

Soluție dată de d-l *Ion S. Antoniu* cl. VII liceul Mânăstirea Dealul.

Pentru ca un număr să fie patrat perfect este necesar ca factorii lui primi să fie ridicați la puterea 2^a sau multiplu de 2; pentruca să fie cub perfect trebuesc ridicați la puterea 3^a sau multiplu de 3.

Deci pentruca un număr să fie în același timp și patrat și cub perfect trebue ca toți factorii lui primi să fie ridicați la puterea: $2\times 3=6$ sau multiplu de 6.

Forma generală a acestor numere este:

$$N=a^{M6}$$

sau:

$$N=a^6$$

unde a ia toate valorile întregi.

Generalizând, ajungem la concluzia că: forma numerelor din care se poate extrage exact în acelaș timp rădăcina de ordinul „m" și „n" este:

$$N=a^{c.m.m.c(m\times n)}$$

un număr care are ca exponent pe cel mai mic multiplu comun al lui m și n sau un multiplu al acestuia.

Au rezolvit problema bine d-nii: *Cristea Goilav* student, *N. Dospinoiu* conductor de lucrări publice, *C. Georgescu* lic. „Cantemir-Vodă" București, *A. Bercescu, St. Popescu, Aurel Sufletel* lic. „M-rea Dealul", *Pincu Katz* Galați, *Samsonovici S., Fl. Georgescu* lic. „Cantemir-Vodă" București, *Bogdan M., Amărăscu Gavril* liceul Caracal, *Fl. Negretzu, Georgescu Ion, Stănciulescu Gh.* liceul Pitești, *C. Berdan* liceul Bârlad, *A. Tauber* liceul Botoșani, *Constantinescu Ion* lic. „M-rea Dealul", *Șerban C. Solacolu* lic. „Matei Basarab" București, *Neștianu Gh., Atanasiu D., Bănărescu G., Dan Popovici* lic. „M-rea Dealul", *Gh. Stancu* lic. Focșani, *Bușilă Adrian, M. Stamatiu* Pitești.

Au rezolvit problema prin încercări d-nii: *Andrei Miclescu* Școala de artilerie, *Măru Dumitru* lic. Galați, *Țenea Ion, Ionescu Ilie, Dobrescu Filip* lic. Caracal, *Dumitrescu Marin* lic. Craiova.

112. — *Să se arate că expresiunea:*

$$E=2^n+3^n+4^n+6^n$$

se divide cu 6 când n este un număr întreg și nedivizibil cu 4.

T. POPOVICI.

1°. Soluție dată de d-l *Valeriu I. Stamatescu* cl. VI R. S. P. U. București și *I. Coșereanu.*

Expresiunea dată se poate pune sub forma:

$$E=2^n+(5-2)^n+(5-1)^n+(5+1)^n$$

sau $$E=M5+[2^n+(-2)^n+(-1)^n+1^n]$$

a) Dacă n este număr impar, paranteza se anulează și deci expresiunea este multiplu de 5:

$$E=M5,$$

b) Dacă n este par, expresiunea devine:

$$E=M5+[2^n+2^n+1^n+1^n]$$

$$E=M5+2(2^n+1)$$

Pentruca expresiunea să se dividă cu 5, trebue ca paranteza să fie multiplu de 5:

$$2^n+1=M5.$$

Dar n fiind par putem scrie: $n = 2^k$

$$2^{2k} + 1 = M5$$

$$4^k + 1 = M5.$$

Expresia $4^k + 1$ se divide cu $4 + 1 = 5$ numai atunci când K este impar, n ne fiind deci divizibil cu 4.

Expresiunea dată E se divide cu 5 pentru orice valori întregi ale lui n, afară de 4 sau multiplu de 4.

2°. Soluție dată de d-l *Florian Georgescu* cl. VI R. lic. „Cantemir-Vodă" București.

Expresia dată se poate scrie:

$$E = (1 + 2^n)(2^n + 3^n)$$

n poate lua valorile:

$$n = 4p + 1$$

$$n = 4p + 2$$

$$n = 4p + 3$$

a) Dacă $n = 4p + 1$, paranteza a doua devine:

$$2^n + 3^n = 2^{4p+1} + 3^{4p+1} = 2 \times 16^p + 3 \times 81^p$$

sau

$$2^n + 3^n = 2(M5 + 1)^p + 3(M5 + 1)^p =$$
$$= M5 + 2 + 3 = M5.$$

b) Dacă $n = 4p + 2$, prima paranteză devine:

$$1 + 2^n = 1 + 2^{4p+2} = 1 + 16^p \times 4$$

sau

$$1 + 2^n = 1 + 4(M5 + 1)^p = M5 + 1 + 4 = M5.$$

c) Dacă $n = 4^p + 3$, a doua paranteză devine:

$$2^n + 3^n = 2^{p+2} + 3^{4p+3} = 8 \times 16^p + 27 \times 81^p$$

$$2^n + 3^n = 8(M5 + 1)^p + 27(M5 + 1)^p =$$
$$= M5 + 8 + 27 = M5.$$

Intreaga expresie e divizibilă cu 5 în toate cazurile afară de cazul când $n = 4p$ n e divizibil cu 4.

In același mod au rezolvit problema d-nii: *Cristea Goilav* student, *Andrei Miclescu* Școala de artilerie, *Octav Ulman* lic. „Internat" Iași, *Stoenescu Alexandru, Isaiia Nicolescu* Ploești, *M. Cocorandu* lic. „Real" Brașov, *C. Georgescu* lic. „Cantemir-Vodă" București, *Pincu Katz, Măru Dumitru* lic. Galați, *Ernest Oprișanu* lic. Bârlad, *Sufletel Aurel* lic. „M-rea Dealul", *N. Teodoru* lic. Huși, *Samsonovici Pidor, Șerbănescu Ion, Virgil Ghițescu* lic. „Mihai-Viteazul" București, *Solomon Alfred* lic. „Matei-Basarab" București, *Stoenescu I. Ilie, Dragomir N. Ion* „Cantemir Vodă București, *Popa Teodor* lic. „Spiru Haret" București, *Fl. Negretzu, Popescu Ștefan, Georgescu Ion* lic. Pitești, *Bogdan M., Amărăscu Gavril* lic. Caracal, *Vincențiu Giotta, Berdan C.* lic. Bârlad, *Al. Tauber, Al. Pamula* lic. Botoșani, *E. Iliescu* lic. „M-rea Dealul", *Samoilă D-tru* lic. Câmpina, *Emil Ștefănescu, Șerban Solacolu, Solomon Wilhelm* lic. „Matei Basarab", București, *Ion Th. Popovici* lic. „Mihai-Viteazul" București, *Vasilache Sergiu, Dan Popovici, Atanasiu D., Neștianu Gh., Răuț C-tin* lic. „M-rea Dealul" *Dumitrescu Marin* lic. Craiova, *Leon Weiss* lic. Galați, *Gh. Stanciu, Bușilă Adrian.*

Au rezolvit problema prin încercări și particularizări d-nii: *N. Dospinoiu* conductor de lucrări publice, *Gogălniceanu M.*, lic. Brăila, *Tr. Dardea* lic. „M-rea Dealul", *Bănărescu Lucrețiu, Marinescu Ion* lic. M-rea Dealul", *Grünfeld Max* lic. Brăila, *Sch nfeld C.* lic. Botoșani, *Ovidiu Gh. Popea* lic. Chișinău, *A. Rizescu, Cr. Rigani, I. Coșereanu, E. Scoruțianu, Puiu Juster.*

113. — *In biblioteca Sorbonei se găsesc 20 de mese de lectură dreptunghiulare, cu locurile pe fețele cele lungi ale dreptunghiului. Locurile sunt două câte două față'n față și sunt numerotate. La masa a treia, două locuri față'n față au numerile 27 și 34.*

Se cere să se afle, pe calea aritmetică, câți studenți pot lucra în bibliotecă în același timp, știind că ultimele 12 mese au câte două locuri mai mult decât cele dintâi, care sunt egale între ele.

P. SERGESCU

1. Soluție dată de d-l *Cristea P. Goilav* Tecuci.

Pentruca numerile 27 și 34 să fie la masa treia, urmează că la primele două mese vor fi în total un număr de locuri mai mic decât 26 și la primele trei un număr mai mare decât 33. Deci numărul n de locuri la o masă va fi

$$\frac{33}{3} < n < \frac{26}{2}$$

$$11 < n < 13.$$

Prin condiția de paritate a numărului locurilor la o masă se determină $n = 12$.

Numărul total de locuri va fi:

$$8 \times 12 = 96$$

$$12 \times (12 + 2) = 168$$

$$264$$

Se observă că numerotarea locurilor trebue să se facă circular la fiecare masă. Numai aşa locurile 27 şi 34 stau faţă'n faţă.

Au rezolvit problema foarte bine în acelaş mod d-nii: *Octav Ulmann* lic. „Internat" Iaşi, *Emil Bercovici* lic. „Matei Basarab" Bucureşti, *Const. E. Georgescu*, *Dragomir N. Ion* lic. „Cantemir" Bucureşti, *Solomon Alfred* lic. „Matei Basarab" Bucureşti, *Atanasiu I. Dumitru*, *Răuţ Const*, *Popovici Dan* lic. M-rea Dealul".

2. Soluţie dată de d-l *Andrei Miclescu* Şcoala Militară de Artilerie.

La masa a treia stau faţă'n faţă numerele 27 şi 34. Intre ele se găsesc alte şase locuri, care vor fi aşezate câte trei pe o parte, fiind două câte două faţă'n faţă:

.....27 28 29 30

.,...34 33 32 31

Ultimul loc de pe prima faţă a mesei a treia poartă No. 30, pe primele 5 feţe vom avea deci 30 de locuri, pe o faţă 6, iar la o masă $2 \times 6 = 12$ locuri.

Primele 8 mese au câte 12 locuri, Ultimele 12 câte 14 locuri. In total 264.

Au dat soluţii foarte bune analoage d-nii: *N. Dospinoiu* conductor de lucrări publice, *Sufletel C. Aurel* lic. „M-rea Dealul", *Constantinescu A. Mihail* lic. „Matei Basarab", *Vincenţiu Giotta* lic. „Codreanu" Bârlad, *M. Cocorandu* lic. „Real" Braşov, *Pincu Katz* Galaţi, *Mehlmann Teodor* lic. „Dragoş-Vodă" Câmpulung Bucovina, *Popescu N. Ştefan*, *Ion B. Ionescu*, *Ion T. Lăzărescu*, *Stănciulescu A. Gh.*, *Mihail Stamatiu*, *Fl. Negreztu* lic. „Brătianu" Piteşti, *C-tin Berdan* lic. „Codreanu" Bârlad, *Ionescu Ilie*, *Ţenea Ion*, *Arcadian Nicolae*, *Amărăscu Gavril*, *Bogdan M.* lic. Caracal, *Ghiţescu Virgil* lic. „Mihai-Viteazul" Bucureşti, *Florian Georgescu*, *Stoenescu I.* lic. „Cantemir" Bucureşti, *Popovici Dan*, *Marinescu Ion*, *Neştianu Gh.* lic. „M-rea Dealul"i *Solomon Wilhelm*, *Şerban Solacolu*, lic. „Matei Basarab" Bucureşti, *Pantazi G. Dumitru* lic. „Bălcescu" Brăila, *Schlesinger Paul*, *Traian Beju*, *Vasile Micula*, *Sever Dragoş* lic. „Moise Nicoară" Arad, *Hr. Nicolau*.

115. — *Să se descompună în factori expresia;*

$$yz(x-1)^3(y-z)+zx(y-1)^3(z-x)+xy(z-1)^3x-y)$$

V. ALACI

I. Soluţie dată de d-l *Cristea P. Goilav* Tecuci. In „Revista Matematică din Timişoara", anul II, No. 1, pag. 5. Se stabileşte identitatea:

$$y^2z^2(x^2-1)^3(y^2-z^2)+x^2z^2(y^2-1)^3(z^2-x^2)+x^2y^2(z^2-1)^3(x^2-y^2)=(1-x^2y^2z^2(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$$

notându-se: $e^{ia}=x$, $e^{ib}=y$, $e^{ic}=z$.

Dacă facem înlocuirea:

$$e^{ia}=\sqrt{x},\ e^{ib}=\sqrt{y},\ e^{ic}=\sqrt{z},$$

obţinem în primul membru chiar expresia ce s'a propus pentru descompunere, iar rezultatul este evident

$$(1-xyz)(x-y)(y-z)(z-x).$$

Au rezolvit-o în acelaş mod d-nii: *Săvescu M.* şi *Ullann O.* lic. „Internat", *Dordea Tr.* lic. „M-rea Dealul", *Georgescu F.* lic. „Cantemir", *Moroianu At.* lic „Mircea cel Bătrân", *Teodorescu St. I.*

II. Soluţie dată de d-l *Stoenescu I.* cl. VI liceul „Cantemir".

Expresia dată se anulează pentru $x=y=z$, deci e divizibilă cu:

$$(x-y)(y-z)(z-x)$$

De asemenea se anulează pentru toate valorile lui x, y, z, care satisfac lui $z=\frac{1}{xy}$ Urmează că: $1-xyz$ e un alt factor al expresiei.

Expresia e deci divizibilă cu produsul:

$$(x-y)(y-z)(z-x)(1-xyz).$$

Impărţitorul fiind de acelaş grad cu expresia, câtul se va reduce la o constantă k, independentă de x, y, z, pe care o obţinem dând lui x, y, z valori particulare: $x=1$, $y=0$, $z=-1$, avem $k=1$.

In acelaş mod au rezolvit-o d-nii: *I. N. Georgescu-Val* Şcoala de artilerie şi *Florea Negretzu Piteşti.*

III. Soluţie dată de d-l *Ion M. Ioniţă* Şcoala Militară de artilerie Timişoara.

Desfăcând parantezele şi reducând termenii asemenea expresia devine:

$$E=x^3y^2z+xy^3z^2+x^2yz^3-x^3yz^2-x^2y^3z-xy^2z^3+yz^2+x^2z+xy^2-y^2z-xz^2-x^2y$$

sau $E=-xyz(x^2z+xy^2+yz^2-x^2y-y^2z-xz^2)+(yz^2+x^2z+xy^2-y^2z-xz^2-x^2y)$

sau $E=(1-xyz)(x^2z+xy^2+yz^2-x^2y-y^2z-xz^2)$

Insă: $x^2z+xy^2+yz^2-x^2y-y^2z-xz^2=$

$-xy(x-y)+z(x-y)(x+y)-z^2(x-y)=$

$(x-y)(zx+zy-xy-z^2)=$

$(x-y)\ y(z-x)-z(z-x)]=$

$(x-y)(y-z)(z-x)$

Prin urmare:

$$E=(1-xyz)(x-y)(y-z)(z-x)$$

Pe aceiaş cale au rezolvit-o d-nii: *Crăinicescu E.* şi *Orest Muş* studenţi Şcoala Politechnică Timişoara, *Dragomirescu E.* Şcoala Militară de Artilerie *Timişoara*, *N. Dospinoiu* conductor lucrări publice, *Bercovici E.* lic. „Matei Basarab". *Freifeld I.* Botoşani, *Nicolau A.* „Cantemir-Vodă", *Tuducescu N.* lic. „Mihai-Viteazul", *Amărăscu C.* Caracal, *Cocorandu M.* Braşov, *Ionescu Ilie* Caracal, *Ionescu I.* Piteşti, *Măru D.* Galaţi, *Oprişanu E.* Bârlad, *Pincu Katz* Galaţi, *Sufletel Aurel* „M-rea Dealul", *Berdan C.* Bârlad, *Buşilă A.* Bucureşti, *Dobrescu F.*, *Dragomirescu I.*, *Georgescu I.* Piteşti, *Ghiţescu V. lic.* „Mihai-Viteazul", *Lăzărescu I.* Piteşti, *Macri Socrate* Botoşani, *Musta Ştefan* lic. „Loga" Timişoara, *Pamula A.* Botoşani, *Popescu S.* Piteşti, *Popoviciu T.* lic. „Moise Nicoară" Arad, *Silion I.* gimnaziul Câmpina, *Stănciulescu Gh.* Piteşti, *Tenea I.* Caracal, *Ionescu N.* lic. „I. C. Brătianu", *Weiss L.* Galaţi,

De asemenea şi d-nii: *Coşereanu I.* P.-Neamţ, *Prundeanu I.* Drăgăneşti-Olt, *Rigani Cr.*, *Juster Puiu* P.-Neamţ,

Pe alte căi au rezolvit-o bine d-nii: *Vincenţiu Giotta* Bârlad, *Scodreanu A.* „Durostor", *Tauber A.* Botoşani, *Ştefănescu E.* lic. „Spiru-Haret".

Soluţii incomplete au dat d-nii: *Ciolacu Miron* Caracal, *Iliescu E.* „M-rea Dealul" şi *Murariu P.* lic. din Lugoj.

RECREATIUNI MATEMATICE

Să se ghicească mai multe numere gândite de o persoană, cu condiţie ca fiecare să fie mai mic ca 10.

Inmulţiţi primul număr gândit cu 2, pe urmă la produs adunaţi pe 5 şi înmulţiţi rezultatul acesta cu 5, la care apoi veţi adăoga numărul 10. La numărul astfel căpătat, adunaţi numărul al doilea gândit. Şi dacă s'au gândit mai multe numere de cât aceste trei, se înmulţeşte rezultatul totdeauna cu 10 şi se adună la fine ultimul număr. Declaraţi suma căpătată. Dacă s'a gândit numai 2 numere, scădeţi 35 şi din restul căpătat, cifra zecilor, va fi primul număr gândit. iar cifra unităţilor al doilea număr gândit. Dacă s'a gândit trei numere, scădeţi 350 şi cifra sutelor restului, va fi primul număr gândit, acea a zecilor al doilea şi acea a unităţilor al treilea. Şi în acelaş mod se procedează mai departe. Dacă s'au considerat patru numere, se va scade 3500 din ultima sumă.

*

Gaura şi bila Se găsesc foarte multe probleme în felul acesteia în *„Récréations mathematiques d'Ozonam"* sau în diverse alte cărţi cu acelaş titlu şi mai ales într'un uvraj fără nume de autor, publicată la Lyon, în 1769 sub titlul: *„Récréations mathématiques composées de plusieurs problèmes plaisants et facétieux"*. Se găseşte în adevăr, în această culegere, probleme cu totul curioase, ca de ex. următoarea. (Problème LX VII, p. 97): *„Când o bilă nu poate să treacă printr'o gaură, este vina găurei sau a bilei, bila este prea mare sau gaura prea mică?* Chestiunea aceasta poate să fie aplicată la multe alte lucruri.

De exemplu, când capul unui om nu poate încăpea într'o pălărie sau căciulă, care-i de vină? Sau când piciorul unei cucoane, nu încape în pantof, care-i de vină? Este pantoful prea mic sau piciorul prea mare? Cu toate că asemenea chestiuni par ridicule, totuşi denotă oarecare subtilitate, când se încearcă a se rezolvi. Căci, dacă spuneţi, că este vina bilei care este prea mare, noi spunem nu, cu atât mai mult, cu cât dacă gaura ar fi mai mare, ea ar trece cu uşurinţă. Este dar vina găurei. Dacă spuneţi, că este vina găurei, care-i prea mică, noi probăm că nu, căci dacă bila ar fi mai mică, ea ar trece uşor prin aceiaş gaură. In scurt dacă voiţi să spuneţi că ambele sunt vinovate, noi spunem că nu, căci dacă am îndrepta şi pe una şi pe alta, şi bila şi gaura, nu ar fi nici o dificultate". Aicea, autorul anonim se cam încurcă şi termină spunând: „Vedeţi cum se poate tatona asupra unui astfel de neînsemnat subiect, aşa ca perdere de timp" Oare nu-i ca aceasta, în toate timpurile şi în toate locurile, secretele discuţiunilor şi subtilităţilor politice?

Lăsăm pe colaboratorii noştri să reflecteze.

M. V.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul A. G. I. R-lui No. 5—6, anul IV, 1922.

Inginer E C. Gabrielescu: Siguranța sborurilor cu avionu Mihail. Boldur: refacerea pălurilor. Cristea Niculescu, Ion Protopopescu, A. I. Pinchis, diferite articole profesionale inginerești, Recenzii, Informații.

*

Manual Mecanic de Inginer Lorenț Alexandru din Ministerul de Război. Lucrare făcută pentru practică. Cuprinde diferite Table numerice, geometrie practică cu diferite formule și date practice pentru măsurători. Chestiuni de mecanică aplicată, mașini simple, Teorie de Rezistența materialelor, cazane, ventilatoare, pompe, calorifere, motoare diferite, Tablouri numerice se întâlnesc aproape la fie ce pagină. Deși lucrarea are oarecare lipsuri, mai ales la nomenclatură, pentru șefi mecanici cu oarecare școală și chiar câte odată pentru ingineri, poate constitui un manual de consultare.

NOTE MATEMATICE

Asupra problemei 52. Această problemă este aplicabilă și la iperbolă și la parabolă. Urmând raționamentul dela elipsă vom găsi în cazul iperbolei locul reprezentat de ecuația:

$$\frac{9\left(x-\frac{c}{3}\right)^2}{a^2}-\frac{9y^2}{b^2}-1=0$$

Locul este deci o iperbolă cu centrul $\left(\frac{c}{3}, 0\right)$ și cu semi-axele $\frac{a}{3}$ și $\frac{b}{3}$. In cazul parabolei locul va fi:

$$y^2-\frac{2}{3}p\left(x-\frac{p}{6}\right)=0.$$

Locul este o parabolă cu centrul în punctul $\left(\frac{p}{6}, 0\right)$ și cu $p'=\frac{1}{3}p$.

I. COSEREANU
Liceul din Piatra-Neamț

Asupra notei d-lui I. Antoniu. In numărul 4 (anul II, R. M. T.), d-l I. Antoniu dă o generalizare, pe cât de interesantă pe atât de frumoasă, mediilor aritmetice, armonice și geometrice și stabilește câteva relațiuni. In cele ce urmează voi căuta să complectez această notă, extinzând chestiunea și asupra altor medii, pe care le cred destul de interesante. In „R. M. y. F. E.“, anul III, pag. 183, se arată anumite relații ce trebue să existe între 2 numere, pentruca ele să fie în medie contra-armonică, aritmo-geometrică și pătratică. Așa de exemplu:

a) Se zice că 2 numere sunt în medie contra-armonică, când avem relațiunea:

$$(1)\qquad k_2=\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}$$

(k_n, însemnând medie contra-armonică a n numere, am preferat notațiunea k_n, în locul lui c_n, care era mai logică, pentru a evita confuzia cu combinările). Relațiunea (1) se poate generaliza imediat, și vom avea:

$$(2)\qquad k_n=\frac{\sum_1^n a_i^2}{\sum_1^n a_i}$$

din relațiunea (2) și ținând seama de nota sus citată vom avea:

$$k_n.\sum_1^n a_i=\sum_1^n a_i^2 \qquad \text{dar: } \sum_1^n a_i=n.A_n \text{ de unde:}$$

$$(3)\qquad n.A_n.k_n=\sum_1^n a_i^2 \qquad \text{adică}$$

Suma patratelor a n numere este egală cu de n ori media aritmetică prin media contra-armonică.

b) Se zice că 2 numere. sunt în medie *aritmo-geometrică*, atunci când avem relațiunile.

$$(4)\qquad A_2^{(g)}=\sqrt{A_2.G_2} \quad \text{sau:} \quad A_2^{(a)}=\frac{A_2+G_2}{2}$$

($A^{(g)}$ și $A^{(a)}$ sunt mediile aritmo-geometrice) generalizând avem:

$$(5)\qquad A_n^{(g)}=\sqrt[n]{A_n.G_n} \quad \text{și} \quad A_n^{(a)}=\frac{A_n+G_n}{n}$$

c) Și în fine se zice că 2 numere sunt în *medie pătratică*, când avem relațiunea:

$$(6)\qquad P_2=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}$$

(unde P_n este media pătratică a n numere), generalizând vom avea

$$(7) \qquad P_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n a_i^2}{n}}$$

Intre aceste formule se pot stabili o mulțime de relațiuni, din combinarea lor între ele, așa de exemplu dau numai una mai importantă

$$(8) \qquad \frac{k_n}{n} = \frac{P_n^2}{\sum_1^n a_i}$$

care se verifică imediat:

avem: $k_n \cdot \sum_1^n a_i = P_n^2 \cdot n$ avem:

$$n \cdot P_n^2 = \sum_1^n a_i^2 \quad \text{și} \quad k_n \cdot \sum_1^n a_i = \sum_1^n a_i^2$$

TRAIAN A. DORDEA.
Elev cl. 8 particular

PROBLEME PROPUSE

155. — Să se arate că numerile din șirul:

729, 970299, 997002999, 999700029999. ...

sunt cuburi perfecte.

I. COSEREANU.

156. — Nici un număr de forma $2^{\alpha+2}+1$ nu poate fi prim afară de 5, (α intreg ≥ 0).

C. H. NICOLAU

157. — Când n^n are n cifre?

LOCOT.-COL. GH BUICLIU

158. — Intru'un cerc de rază R, să înscrie un triunghiu ABC. Dacă l este lungimea bisectoarei unghiului A, limitată la cerc, să se calculeze laturile triunghiului ABC, în funcție de $\hat{A}$, R, l.

MIRON NICULESCU.

159. — Fie ABC un triunghiu oarecare și D un punct pe baza BC. Paralela din D la AB taie pe AC în Q. Să se construiască punctul D astfel ca să avem:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{DQ}$$

ALEXANDRU NICULESCU

160. — Să se arate că α, β, γ fiind variabile, dreptele.

$$\gamma x + \alpha y - \alpha\gamma = 0$$
$$\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$$
$$\alpha x + \gamma y - \beta\gamma = 0$$
$$\alpha x + \beta y - \beta\gamma = 0$$

formează între ele un patrulater inscriptibil.

A. TH. NICOLAU

161. — Să se transforme suma:
$(a-b)^7 + (b-c)^7 + (c-a)^7$ într'un produs.

LT. I. LINTES

162. — Dându-se polinoamele:

$$P(x) \equiv x^4 - x^3 + (a-10)x^2 + (3a-8)x + 2a$$
$$Q(x) \equiv 2x^3 - x^2 + (a-14)x + 7a,$$

să se determine cantitățile A și B, așa în cât să avem:

$$A \cdot P(x) + B \cdot Q(x) \equiv D(x)$$

știind că A e independent de x și B un polinom de gradul I în x, iar $D(x)$ *c. m. m. c. d.* a lui $P(x)$ și $Q(x)$.

CRISTEA P. GOILAV

163. — Să se rezolve ecuația:

$$(x^3 + a^3)(x + a) = b^2x^2$$

A. ANGELESCU

164. — Să se afle limita expresiunei:

$$Y = \sqrt[x]{a + bc^{\sec \frac{\pi}{2}x}}$$

unde $c > 1$, pentru $x = \frac{\pi}{2}$

N. CIORANESCU.

165. — Cât cocs, este necesar, pentru reducerea teoretică a 5000 kgr. fer oligist (Fe_2O_3) la fer metalic?

C. CANDEA.

Erată. In No. 2, anul II, pag. 30 rândul penultim de jos, în loc de ω se va scrie ω^2.

INFORMATIUNI

Şcoala Politechnică din Timişoara cuprinde deocamdată două secţiuni:

a) Secţiunea de ingineri electro-mecanici.

b) Secţiunea de ingineri de mine şi metalurgie.

Alte secţiuni de specializare vor putea fi create în legătură cu nevoile locale sau cele generale ale ţării.

Invăţământul se întinde pe durata a patru ani de studii, după care studentul obţine diploma de inginer, în specialitatea pe care şi-a ales'o.

Pe lângă aceşti patru ani de studii mai există pe lângă şcoală diviziunea pregătitoare, destinată ca să dea studenţilor cari nu pot intra direct în şcoală pregătirea matematică necesară pentru începerea carierei technice. Durata studiilor în diviziunea pregătitoare este de un an.

Admiterea şi matricularea studenţilor în anul I al şcolii se face pe baza unui examen de admitere ce se va ţine la 5 Octombrie 1922.

Inscrierea la acest examen se face prin o cerere timbrată adresată Direcţiunii şcoalei şi însoţită de următoarele acte originale:

a) actul de naştere,

b) un certificat medical constatând că candidatul este de o constituţie sănătoasă

c) una din următoarele diplome:

diploma de absolvire a opt clase de liceu,

diploma de absolvire a unei şcoli superioare de comerţ,

diploma de absolvire a unei şcoli de conductori de lucrări publice,

diploma de absolvire a unei şcoli superioare de arte şi meserii însoţită de certificatul de absolvire a patru clase secundare.

Diplomele altor şcoli streine vor trebui să fie echivalate de Ministerul instrucţiunei.

Examenul de admitere are loc înscris şi oral în faţa unei comisiuni sub preşedenţia directorului şcoalei. Candidaţii care nu posedă bine limba română pot da examenul din ori-care din limbile franceză, germană, maghiară indicând aceasta în cererea de înscriere.

Cererile de înscriere pentru examen se primesc la cancelaria şcolii până la 20 Septembrie cel mai târziu, cele pentru diviziunea pregătitoare până la 10 Octombrie.

Candidaţii reuşiţi la examen vor fi înmatriculaţi în anul I al şcolii în ordinea de merit după notele obţinute.

Candidaţii care nu vor reuşi la examen sau acei care nu sunt suficient pregătiţi pentru a se prezenta la examen, se pot înscrie direct în diviziunea pregătitoare.

Taxele şcolare sunt următoarele:

200 lei taxa de frequenţă anual.

100 lei taxa de înscriere pentru examenul de admitere în şcoală.

Aceste taxe se achită înainte de închiderea înscrierilor adică la 20 Septembrie resp. 10 Octombrie. De aceste taxe nu poate fi scutit nimeni. Candidaţii care nu vor reuşi la examen, şi voesc a se înscrie în diviziunea pregătitoare, vor avea de achitat taxa de frequenţă anuală de 200 lei.

Pe lângă Şcoala Politechnică există un cămin care asigură studenţilor burse sub formă de întreţinere. La dispoziţia studenţilor se găseşte un dormitor unde însă fiecare trebue să-şi aducă rufele pentru pat, şi o cantină unde iau masa.

Aceste burse se acordă în ordine de merit şi numai celor lipsiţi de mijloace. Pentru aceasta candidaţii vor adresa şcolii cererile lor, întovărăşite de un certificat vizat de percepţie din care să se constate situaţia materială a familiei.

Pentru anul acesta sunt 15 locuri de bursieri pentru anul I, care se vor da în ordine de merit la primii 15 cari vor reuşi la examen şi vor prezenta şi certificatul de situaţia materială cerut. Pe lângă aceasta se mai acordă după posibilitate locuri de semi-bursieri care primesc locuinţa şi întreţinerea având să achite numai masa care se ridică la 450 lei lunar.

Programul cunoştinţelor cerute la examenul de admitere în anul I al şcoalei este publicat în Monitorul Oficial, No. 81, din 15 Iulie 1922 şi cuprinde:

I. *Geometria elementară:* Geometria plană, Geometria în spaţiu, Geometria descriptivă.

II. *Algebra.*

III. *Trigonometria.*

IV. *Geometria Analitică.*

V. *Mecanica elementară:* Statica, Elemente de cinematică şi dinamică.

VI. *Fizica:* Gravitatea, Optica geometrică, Acustica.

VII. *Chimia:* Chimia anorganică.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMISOARA.

ANUL II. 15 SEPTEMBRIE 1922 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI ASUPRA CATORVA INSUMARI
2. PROBLEME REZOLVATE.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. NOTE MATEMATICE.
5. CHESTIUNI DE EXAMEN
6. BIBLIOGRAFIE.
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1922

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **Ing. M. Vasiliu** sub-directorul Fabricei de Tutun, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara

---

ANUL II. — No. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1922

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Inginer M. VASILIU, Fabrica de Tutun, Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

ASUPRA CATORVA INSUMARI

de V. ALACI

1. Vom expune o metodă simplă şi uniformă, diferită de cele obicinuite, pentru a obţine câteva însumări cunoscute, de altfel.

Suma progresiilor aritmetice şi geometrice, suma puterilor asemenea a primelor n numere, oarecare formule din teoria combinărilor, oarecare sume algebrice şi trigonometrice se pot obţine uniform prin această metodă, care se sprijină pe o formulă aproape evidentă.

In adevăr, dacă $f(x)$ este o funcţiune oarecare şi n un număr întreg pozitiv, putem scrie:

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)+f(n+1)-f(1)-\sum_{k=2}^{n} f(k)$$

Observând însă că

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)-\sum_{k=2}^{n} f(k)=0$$

termenii reducându-se doi câte doi, relaţiunea (1) devine:

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1)$$

Vom particulariza acum funcţiunea $f(x)$ în vederea obţinerei rezultatelor anunţate.

2. Dacă luăm:

$$f(x)=x(x-1),$$

formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)k-k(k-1)]=(n+1)n,$$

de unde,

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Avem astfel calculată suma primelor n numere. Uşor putem obţine acum însumarea progresiei aritmetice oarecare; astfel multiplicând cu r şi adunând apoi $n\alpha$ la ambii membri ai egalităţei (3), putem scrie dezvoltat:

$$(\alpha+r)+(\alpha+2r)+\ldots+(\alpha+nr)=$$

$$n\alpha+\frac{n(n+1)r}{2}=\frac{n(2\alpha+nr+r)}{2}$$

Notând cu $a, b, c, \ldots l$ termenii din primul membru şi transformând şi al 2-lea membru, avem:

$$a+b+c+\ldots+l=\frac{(a+l)n}{2}$$

formula cunoscută de însumare a progresiilor aritmetice.

3. Dacă luăm, $f(x)=\alpha q^x$

q şi α fiind numere date oarecare diferite de zero, formula (2) devine,

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha(q^{k+1}-q^k)=\alpha(q^{n+1}-q).$$

sau,

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha q^k=\frac{\alpha q(q^n-1)}{q-1}$$

Notând $\alpha q=a$ şi scriind dezvoltat primul membru, avem:

$$a+aq+\ldots+aq^{n-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

formula cunoscută de însumare a progresiilor geometrice.

4. Dacă luăm,

$$f(x) = x(2x^2 - 3x + 1),$$

formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)(2k^2+k) - k(2k^2-3k+1)] = (n+1)(2n^2+n)$$

Efectuând calculele și divizând cu 6 ambii membri, obținem:

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Avem astfel suma patratelor primelor n numere.

5. Dacă luăm,

$$f(x) = x^2(x-1)^2,$$

formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^2 k^2 - k^2(k-1)^2] = n^2(n+1)^2.$$

Efectuând calculele și divizând cu 4 ambii membri, găsim:

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Avem astfel suma cuburilor primelor n numere.

6. Dacă luăm,

$$f(x) = x(x-1)(6x^3 - 9x^2 + x + 1),$$

formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)k(6k^3+9k^2+k-1) - k(k-1)(6k^3-9k^2+k+1)] = (n+1)n(6n^3+9n^2+n-1)$$

Efectuând calculele și divizând cu 30 ambii membri, găsim:

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Avem astfel suma puterilor a 4-a a primelor n numere.

Observare. Putem calcula astfel mai departe suma puterilor a m^{a} a primelor n numere. Se impune însă întrebarea cum se determină polinomul $f(x)$?

Polinomul $f(x)$ se determină în general astfel ca,

$$f(x+1) - f(x) = x^m$$

ceiace am făcut în cazurile de mai sus pentru $m = 1, 2, 3, 4$.

7. Dacă luăm,

$$f(x) = (x-1)x(x+1)(x+2)\ldots(x+p-1),$$

formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} [k(k+1)\ldots(k+p) - (k-1)k\ldots(k+p-1)] = n(n+1)\ldots(n+p).$$

Scoțând factor pe $k(k+1)\ldots(k+p-1)$ și divizând ambii membri cu $p+1$, obținem:

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+p-1) = \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p+1}$$

Utilizând formula combinărilor cu repetiție,

$$\Gamma_j^i = \frac{j(j+1)\ldots j+(i-1)}{1.2\ldots i}$$

formula (7) se scrie mai simplu,

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k^p = p\,\Gamma_n^{p+1},$$

formula care obicinuit se stabilește cu ajutorul triunghiului lui *Pascal*.

8. Dacă luăm,

$$f(x) = (x-1)^2 x(x+1)^2,$$

formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} [k^2(k+1)(k+2)^2 - (k-1)^2 k(k+1)^2] = n^2(n+1)(n+2)^2.$$

Efectuând calculele putem scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(5k^2+5k-1) = n^2(n+1)(n+2)^2$$

sau,

$$(9) \quad 5\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = n^2(n+1)(n+2)^2$$

Insă pentru $p = 2$, relațiunea (7) ne dă,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Așa dar din relațiunea (9) deducem:

$$(10)\quad \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)}{15}$$

9. Dacă luăm,

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p-1)}$$

formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p-1)}\right] = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} - \frac{1}{p!}$$

sau,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p-1)}\left(\frac{1}{k+p} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} - \frac{1}{p!}$$

Efectuând calculele deducem:

$$(11)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\dots(k+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\right]$$

Avem astfel efectuată într'un mod foarte simplu însumarea din primul membru, însumare care pe cale obicinuită, ar necesita descompunerea $\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$ în fracțiuni simple, chestiune care ar cere multe calcule.

Observare. Pentru $n=\infty$, relațiunea (11), devine

$$(12)\quad \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{1}{p!\,p}$$

Avem astfel însumată o serie importantă.

10. Dacă luăm,

$$f(x) = \frac{x(x+1)\dots(x+p)}{(x+p+1)(x+p+2)\dots(x+2p+1)}$$

formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(k+1)(k+2)\dots(k+p+1)}{(k+p+2)(k+p+3)\dots(k+2p+2)} - \frac{k(k+1)\dots(k+p)}{(k+p+1)(k+p+2)\dots(k+2p+1)}\right] = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)}{(n+p+2)(n+p+3)\dots(n+2p+2)} - \frac{(p+1)!}{(p+2)(p+3)\dots(2p+2)}$$

sau,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}{(k+p+2)(k+p+3)\dots(k+2p+1)}\left(\frac{k+p+1}{k+2p+2} - \frac{1}{k+p+1}\right) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)}{(n+p+2)(n+p+3)\dots(n+2p+2)} - \frac{(p+1)!}{(p+2)(p+3)\dots(2p+2)}$$

de unde deducem:

$$(13)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}{(k+p+1)(k+p+2)\dots(k+2p+2)} = \frac{1}{(p+1)^2}\left[\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)}{(n+p+2)(n+p+3)\dots(n+2p+2)} - \frac{(p+1)!}{(p+2)(p+3)\dots(2p+2)}\right]$$

Aplicație. Pentru $p=1$, relațiunea (13) devine:

$$(14)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{1}{4}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} - \frac{1}{6}\right]$$

Observație. Pentru $n=\infty$, relațiunea (13) se transformă în următoarea serie efectuată:

$$(15)\quad \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}{(k+p+1)(k+p+2)\dots(k+2p+2)} = \frac{1}{(p+1)^2}\left[1 - \frac{(p+1)!}{(p+2)(p+3)\dots(2p+2)}\right]$$

11. Dacă luăm,

$$f(x) = \cos 2a\,(x-1),$$

a fiind un arc dat, formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n}[\cos 2ka - \cos 2(k-1)a] = \cos 2na - 1$$

sau,

$$(16) \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin (2k-1)a = \frac{\sin^2 na}{\sin a}$$

12. Dacă luăm,

$$f(x) = \sin 2a(x-1),$$

a fiind un arc dat, formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n}[\sin 2ka - \sin 2(k-1)a] = \sin 2na.$$

de unde,

$$(17) \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos (2k-1)a = \frac{\sin 2na}{2\sin a}$$

13. Dacă luăm,

$$f(x) = \sin a(x-1) + \sin ax,$$

a fiind un arc dat, formula (2) devine,

$$\sum_{k=1}^{n}[\sin ka + \sin (k+1)a - \sin (k-1)a - \sin ka] =$$

$$\sin na + \sin (n+1)a - \sin a$$

sau,

$$\sum_{k=1}^{n}[\sin (k+1)a - \sin (k-1)a] =$$

$$2\sin\frac{(n-1)a}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2} + 2\sin\frac{(n+1)a}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}$$

$$= 4\cos\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}\cos\frac{a}{2}$$

de unde,

$$(18) \qquad \sum_{k=1}^{n}\cos ka = \frac{\cos\frac{(n+1)a}{2}\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$$

formula cunoscută de însumare a cosinusurilor unor arce în progresie aritmetică.

14. Dacă luăm,

$$f(x) = \frac{1}{\cos a(x-1)} + \frac{1}{\cos ax}$$

a fiind un arc dat, formula (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos ka} + \frac{1}{\cos (k+1)a} - \frac{1}{\cos (k-1)a} - \frac{1}{\cos ka}\right]$$

$$= \frac{1}{\cos na} + \frac{1}{\cos (n+1)a} - 1 - \frac{1}{\cos a}$$

sau,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos (k-1)a - \cos (k+1)a}{\cos (k-1)a\cos (k+1)a} =$$

$$\frac{\cos (n+1)a + \cos na}{\cos na\cos (n+1)a} - \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{\cos a}$$

Transformând diferența și suma de cosinusuri în produse și simplificând, obținem:

$$(19) \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin ka}{\cos (k-1)a\cos (k+1)a} =$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left[\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a}{\cos na\cos (n+1)a} - \frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos a}\right]$$

Exemplele tratate sunt suficiente pentru a arăta cum simpla aplicare a formulei (2), poate procura o metodă uniformă pentru efectuarea unor însumări algebrice și trigonometrice, pentru care obicinuit se întrebuințează metode diferite.

PROBLEME REZOLVATE

60. — *Să se rezolve ecuația:*

$$m(x-a)^2 + (a-x+2)\sqrt{x-a} = 1$$

GRIGORE ZAPAN.

Notând, (1) $x - a = \frac{1}{y^2}$

ecuația dată devine scăpând de numitori,

$$y^4 - 2y^3 + y - m = 0$$

sau, $(y^2-y)^2 - (y^2-y) - m = 0.$

Privind $y^2 - y$ ca necunoscut, avem o ecuație de gradul al 2-lea, de unde deducem:

$$y^2 - y - \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2} = 0.$$

Rezolvând în raport cu y, obținem:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{3 \pm 2\sqrt{1+4m}}}{2}$$

Înlocuind în (1) această valoare, deducem:

$$(2)\quad x = a + \frac{2}{2 + \sqrt{1+4m} + \sqrt{3+2\sqrt{1+4m}}}$$

$$(3)\quad x = a + \frac{2}{2 - \sqrt{1+4m} + \sqrt{3-2\sqrt{1+4m}}}$$

Trebue cercetat acum care din aceste 4 soluțiuni satisfac ecuația dată și pentru a simplifica calculele, vom particulariza pe m.

Dacă în (2) facem $m = 2$, avem

$x = a + \frac{2}{2+3+3}$, deci $x - a = \frac{1}{4}$ sau 1.

Se constată ușor că numai $x - a = \frac{1}{4}$ verifică ecuația dată unde $m = 2$, deci numai,

$$(4)\quad x_1 = a + \frac{2}{2 + \sqrt{1+4m} + \sqrt{3-2\sqrt{1+4m}}}$$

este o soluție a ecuației date.

Dacă în (3) facem $m = 0$, avem $x = a + \frac{2}{2-1+1}$ deci $x - a = 1$ sau ∞.

Se constată ușor însă că numai $x - a = 1$, verifică ecuația dată unde $m = 0$, deci,

$$(15)\quad x_2 = a + \frac{2}{2 - \sqrt{1+4m} + \sqrt{3-2\sqrt{1+4m}}}$$

este o nouă soluție a ecuației date. Rădăcinele ecuației date sunt astfel (4) și (5).

Observație. Toți corespondenții, au perdut din vedere faptul important că după ce rezolvă o ecuație irațională, trebue să verifice care rădăcini sunt bune, în cursul calculului putându-se introduce rădăcini streine.

Soluții analoage fără însă a verifica rădăcinele, date de d-nii: *Georgescu-Roegen* cl. VII „M-rea Dealul", *Adalbert Kanner* cl. VIII Galați, și *Popescu E.* Constanța.

D-nii: *Dobrescu T.* și *Ionescu I.* cl. VI Caracal, au rezolvit ecuația în cazul particular $m = 2$.

D-nii: *Iorgulescu C.* și *Săvescu M.*, au rezolvit ecuația dată scriind m în locul lui 2.

D-l *Curea I.* Cluj a făcut un studiu al variațiunei rădăcinelor, fără a le găsi efectiv,

V. A.

118. — *Laturile a, b, c ale unui triunghiu, fiind numere întregi, să se arate că expresiunea:*

$$E = 2[h_a(r_b + r_c) + h_b(r_c + r_a) + h_c(r_a + r_b)]$$

este un patrat perfect și să se afle rădăcina.

EMIL STEFANESCU

1. Soluție dată de d-l *I. St. Teodorescu*, cl. VII R. liceul Ploești:

Înlocuiesc în expresiunea dată pe: r_a, r_b, r_c, h_a, h_b, h_c, date de formulele cunoscute:

$$r_a = \frac{s}{p-a},\quad r_b = \frac{s}{p-b},\quad r_c = \frac{s}{p-c}$$

$$h_a = \frac{2s}{a}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

și obțin:

$$E = 4s^2\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b}\right)\right]$$

$$\therefore E = 4s^2 \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$E = 4s^2 \frac{p^2}{s^2} = 4p^2$$

Expresiunea este deci un patrat perfect. Rădăcina este:

$$\sqrt{E} = 2p = (a+b+c)$$

egală cu perimetrul.

Se observă că nu e nevoe ca laturile să fie numere întregi, ci numai suma lor (perimetrul) e necesar ca să fie un număr întreg.

Au rezolvat problema bine pe aceiaș cale d-nii: *Mircea Bobârnac* student, *Ion Rizescu* Constanța, *Dragomirescu Eduard*, *Ion Ioniță*, *Ion Georgescu-Val* Șc. de artilerie Timișoara; cl. VIII *Tuducescu A. N.*, *Stoenescu Alexandru* lic. „Mihai-Viteazul" București, *M. Săvescu* lic. „Internat" Iași, *N. Chelsoi* lic. P.-Neamț; cl. VII *Isaiia Nicolescu* lic. Ploești, *Constantinescu M.*, *Bercovici Emil* lic. „Matei Basarab" București, *Const. Georgescu* lic. „Cantemir" Bu-

cureşti, *Ionică Eugen*, *Cocorăndu M.* lic. „Real" Braşov; *Ion S. Antoniu*, *E. Iliescu*, *Sufletel Aurel* lic. „M-rea Dealul", *I. D. Vasilescu* lic. „Internat" Iaşi, *Vincenţiu Giotta*, *Ernest Oprişanu* lic. Bârlad, *Ionescu Ilie* lic. Caracal, *Măru Dumitru*, *Ion Iliescu*, *Dinulescu Nic.* lic. Galaţi, *Mocanu Aurel* lic. Huşi, *Samovici I.*; cl. VI *Samoilă D-tru* lic. Câmpina, *Florea Negretzu*, *Dragomirescu Ion*, *Ionescu Ion* lic. Piteşti, *Valeriu Stamatescu* S. P. U. Bucureşti, *Florian Georgescu*, *Dragomir Ion* lic. „Cantemir" Bucureşti, *Solomon Alfred* lic. „Matei-Basarab" Bucureşti, *Bujilă Adrian*, *Ion Popovici*, *Calleya M.* lic. „Mihai-Viteazul" Bucureşti, *Popa I. Teodor* lic. „Spiru Haret" Bucureşti, *Ghiţescu Virgiliu* Bucureşti, *Bogdan M.*, *Ciolacu Miron*, *Amărăscu Gavril*, *Arcadian Nicolae*, *Ţenea Ion*, *Filip Dobrescu* lic. Caracal, *Al. Brăileanu* lic. Constanţa, *Morozianu At.*, *Pamula A.* lic. Botoşani, *Stancu Gh.* lic. Focşani, *Brătescu M.* R.-Vâlcea, *C. Berdan* Bârlad, *Lăzărescu Şt.* Giurgiu, *Constantinescu Ion* lic. „M-rea Dealul": cl. V *Gabrielescu Vasile* lic. Brăila, *Solacolu Şerban* lic. „Matei-Basarab" Bucureşti, *Ştefan Solacolu* lic. „Matei-Basarab" Bucureşti, *Eugen Scoruşeanu* Bucureşti, *Bonea Ion* lic. „M-rea Dealul", *Ion Coşereanu* P.-Neamţ, *Puiu Juster*, *I. Prundeanu*, *Gr. Rigani*.

Prin erori de calcul au ajuns pe aceiaşi cale, la soluţiuni greşite d-nii: *Andrei Miclescu* Şcoala de artilerie Timişoara, *Mihăescu C-tin* lic. Giurgiu.

2. Soluţie dată de d-l *Cristea P. Goilav*;

Am: $h_a = \frac{2pr}{a}$, $h_b = \frac{2pr}{b}$, $h_c = \frac{2pr}{c}$

şi $r_b + r_c = \frac{pr}{p-b} + \frac{pr}{p-c} = \frac{apr}{(p-b)(p-c)}$

$r_c + r_a = \frac{bpr}{(p-c)(p-a)}$; $r_a + r_b = \frac{cpr}{(p-a)(p-b)}$

şi înlocuesc în expresia dată:

$$E = 4p^2r^2\left[\frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} + \frac{1}{(p-a)(p-b)}\right]$$

$$E = 4p^2r^2\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = 4p^2r^2\frac{p}{pr^2} = 4p^2$$

Deci: $\sqrt{E} = 2p = (a+b+c)$

3. Soluţie dată de d-l *Octav Ulman* cl. VIII liceul Internat Iaşi.

In R. M. T., anul I, pag. 107, găsesc relaţiile:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right]: \frac{1}{h_b} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a}\right]:$$

$$\frac{1}{h_c} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right]$$

Deci: $h_a = \frac{2r_br_c}{r_b+r_c}$: $h_b = \frac{2r_cr_a}{r_c+r_a}$; $h_c = \frac{2r_ar_b}{r_a+r_b}$

Inlocuesc în expresia dată:

$$E = 4(r_br_c + r_cr_a + r_ar_b)$$

Dar: $r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}}$ etc.

Deci:

$$E = 4\left[\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)\,p(p-a)(p-b)}{(p-a)(p-c)}} + \dots\right]$$

$$E = 4[p(p-b) + p(p-c) + p(p-a)] = 4p^2.$$

Deci: $\sqrt{E} = 2p = (a+b+c)$

Au rezolvit pe aceiaşi cale problema d-nii: *Cristea Goilav* student; cl. VIII *Em. Socianu* lic. „Internat" Iaşi, *Gogălniceanu M.* Brăila; cl. VII *Dordea Tr.* lic. „M-rea Dealul". *N. Theodoru* Huşi, *Mocanu Aurel* Huşi, *Pinçu Katz* Galaţi; cl. VI *Popoviciu Tiberiu* Arad, *Popescu Ştefan*, *Georgescu Ion*, *Stăncialescu Gh.*, *Lăzărescu Ion* lic. Piteşti, *Stoenescu I.*, lic. „Cantemir" Bucureşti, *Alexandru Tauber* Botoşani, *Ion Şerbănescu*, *Ovidiu Popea* Chişinău.

119. — *Fie* AA' *şi* BB' *două coarde paralele ale unui cerc şi* P *punctul de intersecţie al dreptelor* AB' *şi* A'B. *Insemnând cu* R *raza cercului*, $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ şi $\sphericalangle APB = \theta$, *să se demonstreze că*

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{a\sqrt{R^2-b^2} + b\sqrt{R^2-a^2}}{ab - \sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}}$$

MAIOR O. BUGEANU

I. Soluţie dată de d-l *Tiberiu Popoviciu* cl. VI lic. „Moise Nicoară" Arad.

Fie O centrul cercului; se vede că: $\sphericalangle APB = \sphericalangle AOB = \theta$. Să însemnăm cu p şi q distanţa lui O de AA' şi BB'. Din triunghiurile dreptunghice OMA şi ONB, unde M şi N sunt mijloacele lui AA' şi BB', deducem:

$$\sqrt{R^2-b^2} = q, \quad \sqrt{R^2-a^2} = p$$

deci trebue să arătăm:

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{aq+bq}{ab-qp}$$

Din triunghiurile OMA şi ONB avem:

$$\operatorname{tg} MOA = \frac{a}{p}; \quad \operatorname{tg} NOB = \frac{b}{q}$$

însă: $MOA + NOB + \theta = 180$,

adică $\operatorname{tg}(MOA + NOB) = -\operatorname{tg}\theta$.

Avem apoi:

$$\operatorname{tg}(MOA+NOB)=\frac{\operatorname{tg}MOA+\operatorname{tg}NOB}{1-\operatorname{tg}MOA\,.\,\operatorname{tg}NOB}=\frac{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}}{1-\frac{ab}{pq}}=\frac{aq+bp}{pq-ab}$$

deci: $\operatorname{tg}\theta=\frac{aq+bp}{ab-pq}$ $\therefore$ θ arc tg $\frac{aq+bp}{ab-pq}$

Urmând acelaș raționament au rezolvit problema bine D-nii: *Cristea Goilav* Tecuci, *I. N. Georgescu-Val* și *Ioan Ioniță* Școala de artilerie; cl. VIII *O. Ulman* și *M. Săvescu* dela lic. „Internat", *Stoenescu Al.*; cl. VII *Ion I. Iliescu* „V. Alexandri"; cl. VI *Negretzu Florea*.

Deasemenea: *Iosef Freifeld* Botoșani, *E. Scoruțeanu* București.

II. Soluție dată de d-l *Teodorescu St. I.* cl. VII Ploești.

Ducem diametrii AA_1 și BB_1. Din triunghiurile dreptunghice $AA'A_1$, $BB'B_1$ avem:

$$(1)\begin{cases}\operatorname{tg}\widehat{AA_1A'}=\operatorname{tg}\frac{\text{arc }AA'}{2}=\frac{2a}{\sqrt{4R^2-4a^2}}=\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}\\ \operatorname{tg}\widehat{BB_1B'}=\operatorname{tg}\frac{\text{arc }BB'}{2}=\frac{2b}{\sqrt{4R^2-4b^2}}=\frac{b}{\sqrt{R^2-b^2}}\end{cases}$$

Iar din relațiunile:

$$\text{Măs. }\widehat{APA'}=\frac{\text{arc }AA'+\text{arc }BB'}{2}=\text{Măs}\,(180^0-\theta)$$

deducem:

$$\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}\frac{\text{arc }AA'+\text{arc }BB'}{2}=-\frac{\operatorname{tg}\frac{\text{arc }AA'}{2}+\operatorname{tg}\text{arc}\frac{BB'}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\text{arc }AA'}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{\text{arc }BB'}{2}}$$

Ținând seamă de relațiile (1) avem:

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{R^2-b^2}}}{1-\frac{ab}{\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}}}$$

$$\text{arc tg}\,\theta=\frac{a\sqrt{R^2-b^2}+b\sqrt{R^2-a^2}}{ab-\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}}$$

III. Soluție dată de d-l *Mircea Bobârnac* student

Unim A cu B. Insemnăm pentru prescurtare: $\widehat{BAB'}=\alpha$ și $\widehat{ABA'}=\beta$. In triunghiul ABP: $\theta=180^0-(\alpha+\beta)$ și deci:

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}[180^0-(\alpha+\beta)]=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

In triunghiul ABB' avem relația: $2b=2R\sin\alpha$, sau $\sin\alpha=\frac{b}{R}$, de unde:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}}=\frac{\sqrt{R^2-b^2}}{R}$$

Asemenea în triunghiul ABA': $2a=2R\sin\beta$, $\sin\beta=\frac{a}{R}$ $\therefore$ $\cos\beta=\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}}=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}$; Deci:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sqrt{R^2-b^2}}\quad\text{și}\quad\operatorname{tg}\beta=\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{\frac{b}{\sqrt{R^2-b^2}}+\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}}{1-\frac{ab}{\sqrt{(R^2-b^2)(R^2-a^2)}}}=$$

$$\frac{b\sqrt{R^2-a^2}+a\sqrt{R^2-b^2}}{ab-\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}}$$

Din felul cum demonstrează d-sa, deduce că nu e absolută nevoe ca cele două coarde să fie paralele.

Pe alte cai au mai demonstrat-o și d-nii: *cl.* VII *Cocorandu M.* Brașov- *Mihăiescu C.* Giurgiu, *E. Oprișan* Bârlad; cl. VI *Stoenescu I.* „Cantemir", *A. Niculescu* „M. Basarab„ *Dragomirescu* „Cantemir" precum și *I. Coșereanu*.

120. — *Să se rezolve și să se discute ecuația:*

$$\sin 2x+\cos 3x=m\cos x.$$

Caz particular: $m=-1$.

N. ABRAMESCU

Soluție dată de d-l *Tiberiu Popoviciu* cl. VI R. liceul „Moise Nicoară" Arad:

Ecuația dată se poate scrie, făcând înlocuirile în funcție de arcul întreg:

$$2\sin x\cos x+4\cos^3 x-3\cos x-m\cos x=0$$

$$\therefore\ \cos x\,[4\sin^2 x-2\sin x+m-1]=0$$

și se reduce la ecuațiile:

$$\cos x = 0$$

$$4\sin^2 x - 2\sin x + m - 1 = 0.$$

Prima ecuație ne dă imediat soluția:

$$x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

iar cea de a doua

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4m}}{4}$$

$$\therefore \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \arcsin \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4m}}{4}$$

Condiția de realitate a rădăcinilor este ca realizantul să fie pozitiv:

$$5 - 4m \geq 0$$

de unde: $$m \leq \frac{5}{4}$$

Sinusul variind între -1 și $+1$:

$$-1 < \sin x < +1$$

vom avea:

$a.$ $\sqrt{5 - 4m} \leq 3$

$$5 - 4m \leq 9$$

$$m \geq -1$$

și în acest caz avem pentru ecuația a doua, două rădăcini reale.

$b.$ $\sqrt{5 - 4m} \leq 5$

$$5 - 4m \leq 25$$

$$m \geq -5$$

și avem pentru ecuația a doua numai o rădăcină reală.

Vom avea deci pentru ecuația propusă următoarele rădăcini:

Când m variază între:

$-\infty$ și -5: o singură rădăcină reală.

-5 „ -1: două rădăcini reale.

-1 „ $+\frac{5}{4}$: trei rădăcini reale.

$\frac{5}{4}$ „ $+\infty$: o singură rădăcină reală.

Caz particular: $m = -1$.

In acest caz am soluția:

$$x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

și soluțiile:

$$\sin x = \frac{1 + 3}{4} = 1, \quad -\frac{1}{2}$$

deci $$x_2 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2}$$

$$x_3 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

Au rezolvit problema bine d-nii: *Andrei Miclescu* Școala de Artilerie Timișoara.

Cl. VIII *Octav Ulmann* lic. „Internat" Iași, *Emil Bercovici* lic. „Matei Basarab", *Tuducescu Nic.* lic. „Mihai-Viteazul, *Stoenescu Alexandru* București, *Ion Coșereanu* P.-Neamț; cl. VII *Const. Georgescu* lic. „Cantemir-Vodă" București, *Amărăscu Gavril, Ionescu Ilie* lic. Caracal, *Mihăescu Const.* lic. Giurgiu, *Cocorandu M.* lic. Brașov, *Mehlman Teodor* lic. Câmpu Lung-Bucovina, *Samovici I.*; cl. VI *Florian Georgescu, Stoenescu I.* lic. „Cantemir" București, *Florea Negretzu, Popescu Ștefan* lic. Pitești, *Constantinescu Ion* lic. „M-rea Dealul".

Incomplet au rezolvit d-nii: *Cristea P. Goilav* Tecuci, *R. Bruker* București, *I. Georgescu* Șc. de artilerie Timișoara; cl. VIII *Propst Ion;* cl. VII E. *Iliescu* lic. „M-rea Dealul", *N. Teodoru* lic. Huși, *I. Lazărescu* lic. Pitești, *I. D. Vasilescu* lic. „Internat" Iași, *A. Bărglăzan;* cl. VI *Valeriu Stamatescu* S. P. U. București, *Popa I. Teodor* lic. „Spiru Haret" București, *Brătescu Mihail* R.-Vâlcea, *Macri Socrate* Botoșani.

S'au strecurat greșeli de calcul în soluțiile d-lor: *Eugen Scoruțianu* București, *Bușilă Adrian, Gr. Rigani, Grig. Moisil*; cl. VIII *Nicolau Alexandru* lic. „Cantemir" București, *M. Săvescu* lic. „Internat" Iași; cl. VII *Pincu Katz* Galați; cl. VI *Emil Ștefănescu* lic. „Spiru Haret", *Alexandru Niculescu* lic. „Matei Basarab" București.

122. — *Există numere care să fie egale cu produsul cifrelor lor?*

IOAN B. FLORESCU

Soluție dată de d-l *Ion Rizescu:*

Numărul cerut ar avea expresiunea:

$$N = 10^n . a + 10^{n-1} . b + 10^{n-2} c + \ldots + 10l + k$$

unde $a, b, c \ldots l, k$ ar fi numere întregi, pozitive și mai mici decât 9 sau cel mult egale cu 9.

Numărul are $(n+1)$ cifre.

Pentruca să existe numerele cerute, trebue să avem relația.

(1) $10^n a + 10^{n-1} b + 10^{n-2} c + \ldots + k = a.b.c \ldots k$

Dar produsul

$$a.b.c\ldots k < 9^n a$$

iar $$9^n a < 10^n a$$

deci $$a.b.c\ldots k < 10^n a$$

și cu atât mai mult:

$$10^n a + 10^{n-1} b + 10^{n-2} c + \ldots + k > a.b.c\ldots k$$

Egalitatea (1) nu este satisfăcută, deci numerile cerute nu există.

Au rezolvit problema bine d-nii: Cl. VII *Florea Negretzu* lic. Pitești, *Pincu Katz*, *Măru D-tru* lic. Galați. *Aurel Sufletel* lic. „M-rea Dealul"; cl. VI *Tiberiu Popoviciu* lic. Arad, *Solomon Alfred* lic. „Matei Basarab" București, *Neștianu Gh.*, *Atanasiu D-tru* lic. „M-rea Dealul"; cl. V *Solomon Wilhelm* lic. „Matei Basarab" București, *Ovidiu Popea* Chișinău.

Au rezolvit problema, pornind din aproape în aproape, pentru un număr de 2, 3, 4 ... *n* cifre, într'un mod analog cu cel de mai sus, d-nii: cl. VIII *Tuducescu Nicolae* lic. „Mihai-Viteazul" București; cl. VII *Focșeneanu M.* lic. „M-rea Dealul"; cl. VI *Popovici Dan* lic. „M-rea Dealul", *Gheorghiu Traian* lic. Galați, cl. V *Solacolu Șerban* lic. „Matei Basarab" București.

D-l *Alexandru Tauber* cl. VII lic. Botoșani, consideră numărul scris într'o bază oarecare.

D-i *C. Berdan* Bârlad rezolvă problema, cercetând fiecare cifră în parte și ajungând la concluzia că nici o cifră din șirul 1—9 nu poate face parte din numărul cerut, deci asemenea numere nu există.

123. — *Dacă p este un număr prim, să se arate că expresiunea:*

$$E = 1.2.3\ldots(p-1)\,p + 2(1+2+3+\ldots+p)$$

este divizibilă prin p^2.

I. M. SERBANESCU.

I. Soluție dată de d-nii *Cristea Goilav* student și *Ciorănescu C.* cl. IV lic. „M-rea Dealul".

Expresiunea se poate scrie:

$$E = p! + p(p+1) = p[(p-1)! + 1 + p]$$

După teorema lui Wilson avem:

$$(p-1)! + 1 = M\,p$$ căci p e prim

avem deci: $E = p(M\,p + p) = p^2(N+1) = M\,p^2$

N fiind prim cu p Divizibilitatea e deci stabilită.

In acelaș fel au rezolvit problema foarte bine d-nii: *Mircea Bobârnac* student; *Andrei Miclescu* și *I. N. Georgescu-Val* Școala militară de artilerie Timișoara; cl. VIII *Dordea T.* lic. „M-rea Dealul", *I. Rizescu* Constanța, *Octav Ulman* lic. „Internat"; cl. VII *Măru D.* și *Pincu Katz* Galați, *A. Tauber* Botoșani, *Georgescu C.* „Mihai-Viteazul", *Nicuță Theodoru* lic. „Cuza-Vodă" Huși, *Vincențiu Giotta* Bârlad, *I. T. Lăzărescu*, *Popescu N. Șt.*, *Stănciulescu Gh.* și *Florea Negretzu* toți din liceul dela Pitești, *Aurel Sufletel* „M-rea Dealul", *Focșeneanu I. M.*; cl. VI *Brăileanu A.* „Mircea cel Bătrân" Constanța, *Tiberiu Popoviciu* Arad, *Atanasiu D.* și *Neștianu Gh.* lic. „M-rea Dealul", *Dragomir I.*, *Stoenescu I.* și *Florian Georgescu* lic. „Cantemir-Vodă" București, *Popa I. Th.* și *E. Ștefănescu* „Spiru Haret" București, *C. Berdan* Bârlad, *Dobrescu-Băbiciu* Caracal; cl. V *Gabrielescu V.* „N. Bălcescu" Brăila, *Ovidiu Popea* Kișinău, *Leon Weiss* și *Demetrescu G.* „V. Alexandri" Galați, *Schönfeld* „Laurian" Botoșani, *Ionescu Carol* „Cantemir-Vodă" București, *Popovici Dan*, *Marinescu I.* lic. „M-rea Dealul", *Solomon Wilhelm* „Matei Basarab.

De asemenea și d-nii: *Solomon Asnaș* Călărași, *G. Rigani* Constanța, *Vasilache Sergiu* și *Bonca I.* dela „M-rea Dealul", *I. Coșereanu* P.-Neamț, *Bușilă A.*, *Isaiia Niculescu*.

II. Soluție dată de d-l *I. D. Vasilescu* cl. VII lic. „Internat" Iași.

Expresia E se mai poate scrie:

$$E = 1.2.3\ldots p + p(p+1)$$

însă:

$$1.2\ldots p = p^2[(p-2)! - (p-3)! + \ldots + 3! - 2! + 1] - p$$

de unde:

$$E = M\,p^2 - p + p(p+1) = M\,p^2$$

D-nii *Al. Tauber* și *Al. Brăileanu* caută să generalizeze problema în modul următor:

Dacă a e un număr prim cu numărul prim p, iar b oarecare, atunci expresia:

$$E = a^{p-1} \times b \times (p)! + 2b(1+2+3+\ldots+bp)$$

e divizibilă prin p^2.

Expresia dată se mai scrie:

$$E = a^{p-1} \times b \times (p)! + bp(bp+1) =$$
$$bp[a^{p-1}(p-1)! + bp + 1]$$

Insă (după teorema anunțată la problema 102):

$$a^{p-1}(p-1)! + 1 = M\,p,$$ deci

$$E = bp[M\,p + bp] = bp \times M\,p = M\,p^2$$

Făcând $a = b = 1$ dăm de problema noastră.

D-l *Fl. Georgescu* face următoarea observare:

Analog avem și expresia:

$$E = p!^2 - 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3)$$

care e divizibilă cu p^3, p fiind număr prim

Avem: $E = p!^2 - 4\frac{p^2(1+p)^2}{4}$

căci: $1^3+2^3+\ldots+p^3=(1+2+3+\ldots+p)^2$

sau: $E=[p!+p(p+1)][p!-p(p+1)]$

Prima paranteză e chiar problema propusă, iar paranteza doua evident că este divizibilă cu p.

D-l *Tiberiu Popoviciu* arată că putem avea analog:

1: $E=1.2.3\ldots(p-1)p+p+(1+3+5+\ldots+p)=Mp^2$

2: $E=1.2.3\ldots(p-2)p-2(1+2+3+\ldots+p)=Mp^2$

3: $E=1.2.3\ldots(p-1)p+3\frac{1+2^2+3^2+\ldots+p^2}{1+2+3\ldots+p}=Mp^2$

4: $E=1.2.3\ldots(p-1)p+2\sqrt{1+2^3+3^3+\ldots+p^3}=Mp^2$

RECREATIUNI MATEMATICE

O persoană face două pachete; unul de trei cărți și altul de șease cărți și ia unul în mâna stângă și altul în mâna dreaptă. Să se ghicească, în care mână se găsește pachetul de trei, fără a cere nimica, nici o deslușire dela această persoană.

Spuneți persoanei să dubleze numărul cărților care sunt în mâna sa dreaptă și să tripleze numărul celor ce sunt în mâna stângă, să facă suma acestor două numere și să o dividă în două părți egale iar dintr'o jumătate se scade numărul 11. Dacă persoana face aceste diferite calcule, fără a protesta, înseamnă că pachetul de trei cărți se află în mâna dreaptă dacă din contră, dânsa protestează, pachetul de trei cărți este în mâna stângă, dându-se astfel singură de gol.

In adevăr, să presupunem că cele trei cărți sunt în mâna dreaptă și celelalte șase în mâna stângă. Atunci operațiile indicate, vor fi următoarele:

Dublul lui trei crescut cu triplu lui 6 face 24 a cărui jumătate este 12, din care scăzând 11 mai rămâne 1.

Din, contră, dacă cele trei cărți sunt în mâna stângă, dublul lui 6 crescut cu triplu lui 3 face 21 a cărui jumătate fiind 10,5 nu putem scădea pe 11 și atunci persoana protestează.

Când nu sunt la dispoziție joc de cărți, se pot înlocui acestea prin nasturi, monede mici sau alte obiecte de acest fel.

Cum s'ar putea generaliza acest frumos exercițiu? S'ar putea estinde la chestiuni analoage sau chiar mai diferite? Așteptăm cu plăcere, rezultate, dela corespondenții noștri.

M. V.

NOTE MATEMATICE

Asupra unei note matematice. In No. 9 al R. M. T., anul I, în nota matematică „Asupra triunghiurilor în care avem $na=b+c$" se expun câteva proprietăți foarte interesante cari au însă cusurul — unele din ele — că sunt demonstrate pe niște căi cam lungi. In cele ce urmează voi da o demonstrație mai elegantă și ușoară a acestor proprietăți.

Pentru a scoate relația: $\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_b}=\frac{2}{(n-1)r_a}$ procedăm astfel.

Din: $na=b+c$ deducem: $(n-1)a=b+c+a$ sau:

$\frac{n-1}{2}a=\frac{b+c-a}{2}=p-a$ deci $a=\frac{2}{n-1}(p-a)$ (1)

Făcând substituția

$a=p-b+p-c$ și $(p-a)=\frac{s}{r_a}$ etc....

avem: $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{r_a}$ Q. E. D.

Pentru a scoate relația: $r=r_a\frac{n-1}{n+1}$ procedăm astfel.

Din $na=b+c$ rezultă $(n+1)a=a+b+c=2p$

și deci $a = \frac{2}{n+1} p$ (2) și împărțind pe (1) prin (2) rezultă:

$$1 = \frac{(n+1)(p-a)}{(n-1)p} \quad \text{de unde} \quad p = (p-a)\frac{n+1}{n-1}$$

și făcând substituția $p = \frac{s}{r}$ și $p - a = \frac{s}{r_a}$ obținem: $r = r_a \frac{n-1}{n+1}$ Q. E. D.

De asemenea din:

$$\frac{na}{n \sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$$

pentrucă: $na = b + c$ rezultă imperios

$$n . \sin A = \sin + \sin C.$$

ION SERBANESCU
cl. VI Mihai-Viteazul Buc.

Asupra problemei 64. Generalizarea acestei probleme nu este completă. Putem extinde divizorii și demonstra că:

$$a(a^{2p'} - 1) = M6p \qquad 2p' + 1 = p$$

1°. a este prim cu p — număr prim — După Fermat avem:

$$a^{2p'} - 1 = M(2p' + 1) = Mp.$$

Apoi putem scrie:

$$a^{2p'} - 1 = (a^{p'} - 1)(a^{p'} + 1)$$

dacă p' este impar atunci $a^{p'} + 1$ se divide cu $a + p$ iar dacă $p' - 2p''$ putem scrie:

$$(a^{p'} - 1) = (a^{p''} - 1)(a^{p''} + 1)$$

ș. a. m. d. până când căpătăm un factor de forma $a^z + 1$, unde z este impar, care se împarte cu $a + 4$. Așa dar expresia considerată are printre alții și factorii $a(a-1)(a+1)$ care se divid în orice caz cu 6 deci:

$$a(a^{p-1} - 1) = M6p \qquad \text{Q. E. D,}$$

2°. In cazul când $a = mp$ teorema este evidentă. Așa dar în cazul problemei 64 avem

$$a(a^4 - 1) = M30.$$

N. GEORGESCU-ROEGEN
cl. VII lic. mil. M-rea Dealul

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOLILE MILITARE DE ARTILERIE, GENIU ȘI CONSTRUCȚII

I. *a*) — Să se găsească valorile lui m astfel încât rădăcinele ecuațiunii $x^2 + (m+2)x + m^2 = 4$, să satisfacă egalitatea $\frac{x'x''}{x'^2 + x''^2} = 3$ și să se verifice.

b). — Să se studieze variația trinomului $X = x^2 + (m+2)x + m^2 - 4$ pentru toate valorile lui X indicând maximum și minimum (bine înțeles avându-se în vedere valorile lui m care au satisfăcut egalitatea.

II. — Pe dealul care l'ați urcat ca să intrați în școală (zis Dealul Spirei) încerca să-l urce un furgon cu fân înhămat cu 4 cai. Furgonul cântărise la basculă 2500 kgr. brutto. Panta e de $^1/_4$.

Se cere să se calculeze cu' cât o să se îngreueze tracțiunea când furgonul o să urce această pantă și dacă cei 4 cai vor putea urca panta știind că un cal poate ușor urca 500 kgr.

III. — Intr'un patrat A B C D se duce prin punctul A o dreaptă care întâlnește pe C D în în punctul F și pe B C în punctul B, iar diagonala B D în punctul G.

Să se arate că dreapta G C este tangentă la cercul ce trece prin punctele C, E, F.

IV. — Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică Anul XXVII, No. 11, Iulie 1922, București. — Proprietăți ale unor puncte remarcabile ale triunghiului, de Miron Niculescu. Asupra involuției determinată pe o dreaptă de un fascicol punctual de conice, de N. Abramescu. Premiul pentru lucrări de matematică pură aplicate la științele militare. Premiul „Inginer H. Capriel".

No. 12. August 1922. O problemă de analiză cu aplicații, de Gh. Zapan. Asupra unor integrale, de Mihail Ghermănescu. Premiul „Inginer H. Capriel".

Fiind ultimul număr din anul XXVII, *gazeta* are la urmă tabla de materii.

Revista de matematicas y Fisicas Elementales Ano. IV, Mayo 1922, Num. 1. Buenos Aires. *Iacobo Clerk Maxwell*, de A. Imboden. Cele patru operațiuni fundamentale cu polinoame de puteri întregi ale unei singure litere; Economia și experiența în matematicile elementare, de Dr. B. Ig. Baidaff.

Num. 2. Iunie 1922. *Hunfredo Davy* de A. Imboden. Asupra aplicațiunei teoremei lui *Sturm* de Emilio Rebuelto. Notiță bibliografică asupra economiei matematice, de A. Lanfranco R. Al treilea concurs al *„Revistei de matematicas y fisicas elementales"*.

Num. 3. Iulio 1922. *Poincarè*, de C. C. D. Primul concurs din Iulie de B. Ig. Baidaff. Teoria relativității de Petre Sergescu.

PROBLEME PROPUSE

166. — Există numere de cinci cifre consecutive, astfel ca ele să fie produsul unei puteri a lui 3 prin o putere a lui 4?

FLORIAN ER. GEORGESCU

167. — Să se calculeze valoarea expresiunei

$$E = \frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}}}}}$$

numărul radicalilor suprapuși fiind p și ce devine această expresiune când p tinde la infinit?

STOENESCU AL. I.

168. — Să se calculeze suma termenilor seriei:

$$1 - \frac{3}{a} + \frac{6}{a^2} - \frac{10}{a^3} - \frac{15}{a^4} \cdots.$$

N. CIORANESCU.

169. — Să se calculeze direct, fără desvoltare, valoarea derivatei determinantului.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^x & a^{2x} \\ 1 & b^x & b^{2x} \end{vmatrix}$$

A. NICOLAU

170. — Știind că $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ sunt rădăcinele ecuației $x^3 + px + q$, să se formeze ecuația de gradul al III-lea ale cărei rădăcini să fie

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2},\ \operatorname{tg}^2\frac{y}{2},\ \operatorname{tg}^2\frac{z}{2}$$

CRISTEA P. GOILAV

171. — Să se afle fără ajutorul derivatelor, limita expresiunei:

$$y = (\sin x + \cos 2x)^{\operatorname{tg} 3x}$$

când x tinde la 30^0.

M. SARIAN

172. — Să se stabilească identitatea:

$$2\sum_{k=1}^{n} \sin k a \sin\left(k^2 a + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\left[n(n-1)a + \frac{\pi}{4}\right]$$

V. ALACI

173. — Să se arate că în orice triunghiu, între raza R a cercului circumscris și raza r a cercului înscris există relația:

$$R \geq 2r.$$

GRIGORE ZAPAN

174. — Se consideră o elipsă și un punct M mobil pe ea. Se duce din focarul F o perpendiculară pe tangenta la elipsă în punctul M. Să se afle locul geometric al intersecției acestei perpendiculare cu raza vectoare MF'.

I. COSEREANU.

175. — O trăsură se coboară pe o șosea înclinată cu panta $\frac{1}{18}$ în virtutea greutății ei (g=9,18), în două minute. Să se afle câte invârtituri au făcut roțile dinainte și cele dinapoi dacă diametrele lor sunt 0,60 și 0,90 m.

C. TEODORESCU.

INFORMATIUNI

Examenul de admitere în anul I al Şcoalei Politechnice din Timişoara, începe în ziua de 5 Octombrie şi se va termina la 10 Octombrie când se dă şi rezultatul. Examenul se ţine în scris şi oral şi candidaţii vor avea să aducă cu dânşii cele necesare pentru scris: hârtie, cerneală, condei, pe lângă rechizite de desen pentru facerea figurilor la geometrie, etc.

Comisia de examinare se compune din d-nii *V. Vâlcovici*, directorul şcoalei, preşedinte şi *Ing. C. Teodorescu*, subdirectorul şcoalei, *V. Alaci* şi *Lt.-Col. Gh. Buicliu* profesori ai şcoalei ca membri.

Pe baza examenului de admitere şi în ordine de merit se vor acorda burse în căminul şcoalei adică locuinţe şi întreţinere completă. Doritorii de a obţine bursă se vor înscrie la secretariat anexând un certificat din care să se constate situaţia materială a părinţilor. Acest certificat trebue vizat de percepţie trecându-se N-rul rolului de contribuţie la care e înscris părintele şi dările ce le plăteşte către stat.

Construcţia pavilionului Şcoalei Politechnice din Timişoara a început. Proectele fiind întocmite s'a ţinut licitaţie şi s'a aprobat de Minister asupra *Băncii Imobiliare şi Intreprindere de construcţii s. p. a. Timişoara*. Costul lucrărilor după deviz se ridică la suma de 8.400.000 lei.

Din această sumă comuna Timişoara contribue cu o donaţie de 3 milioane, şi datorită acestui ajutor important s'a hotărît începerea lucrărilor, cum construcţia se va continua în anul viitor sperăm că vom putea completa prin donaţii diferite părţi din aranjamentul interior. Astfel până acum *Banca Timişoarei şi Societate comercială s. p. a.* ne-a donat suma de 62.250 lei pentru această clădire.

Construcţia se compune din un pavilion aşezat pe Bulevardul Mihai Bravul, în apropierea cheiului Beghei, cu o faţadă de 52 m. şi cu trei etaje şi subsol. Faţada este tratată în stil românesc, în cărămidă aparentă de culoare galbenă. Adâncimea construcţiei este 28 m.

Din cauza vacanţei apariţia cursului de mecanică elementară s'a întrerupt. Nu au apărut de cât patru fascicule care s'au trimes abonaţilor noştri. In cursul acestei săptămâni se va reîncepe scoaterea fasciculelor care se vor expedia pe măsura apariţiei. Fiindcă s'au făcut multe abonamente şi colecţia s'a epuizat, nu se mai pot primi abonamente la acest curs. Rugăm pe corespondenţii noştri să aştepte apariţia ediţiei II-a, în cursul anului şcolar următor.

In timpul când No. 6 al Revistei noastre era sub presă, s'au mai primit la Redacţia noastră, cu întârziere un număr de soluţii, relativ la problemele, care erau deja culese, în intervalul de timp dela culegere şi pânăla expedierea Revistei. Cum aceste soluţii sunt condamnate peirei, pentru a nu descuraja pe colaboratorii noştri, când numărul acestora va fi mai important, vom publica la informaţii numele lor, în numărul ce urmează al Revistei, se înţelege neluând în consideraţie, pe acelea sosite, după primirea Revistei noastre. Relativ la No. 6, dăm numele următoare:

97.—D-nii: *August Şt. Gutu, Ion Coşereanu, Ion Rizescu, Solomon I. Asnaş*

104.—D-nii: *Dumitrescu G. Marin, Pavel I. Dumitrescu, Ionescu I. Longin, Radu D. Gheorghiade, Buşilă Adrian, Dobrescu Babici.*

106.—D-nii: *Popovici Puiu, I. Dan, Ionescu T. Carol, Gutu Şt. August, Buşilă Adrian, Mircea Bobârnac, Al. Brăileanu, Ovidiu G. Popea, Pavel I. Dumitrescu, Solomon Asnaş.*

111—D-nii: *Dobrescu Babici, Solomon Asnaş, Focşeneanu I. M., Tiberiu Popoviciu, Cioränescu Const., Ionescu I. Ilie, Vasilache Sergiu.*

112.—D-nii: *E. Bercovici, Gabrielescu Vasile, Stănciulescu B. Gheorghe, Al. Brăileanu, Mihăescu D. Constantin, O. Urzică, Solomon Asnaş, Iordăchescu N. Nestor, Dobrescu Băbici, V. Dan, Silion Gh. Ioan, Gabrielescu C. Vasile,*

113. — D-nii: *Silion Gh. Ion, E. Iliescu, Focşeneanu I. M., V. Dan, Iordăchescu N. Nestor, Const. Gh. Beşliu, Solomon I. Asnaş, E. Iliescu.*

115.—D-nii: *V. Dan, Const. Chiorescu, Trincă D. Marin, Isaiia Nicolescu, I. N. Georgescu-Val, Pavel I. Dumitrescu, Ovidiu Gh. Popea, Lăzărescu Fl. Ştefan, Petru Murariu* cl. V lic. „Coriolan Brediceanu" Lugoj, *Ionescu I. Longin, Mircea Bobârnac, Focşeneanu I. M., Mih. Stamatiu, Bogdan M., Emilian Iliescu, Const. Beşliu.*

La Problemele rezolvite, publicate în acest număr, sau mai primit, pe când materia era deja paginată la tipografie următoarele soluţii:

118.—D-nii: *Solomon Wilhelm, Trincă D. Marin, Ionescu I. Longin, Pavel I. Dumitrescu, Dumitrescu S. Marin, Brătescu H. Mihail, Mehlmann Theodor, Emilian Iliescu, S. Klein, A. G. Popeanu, Focşeneanu I. M., V. Dan,*

119. — D-nii: *Const. Chiorescu, Dragomirescu-Buzne Eduard, Florian Er. Georgescu, Solomon I. Asnaş, Pincu Katz,*

120.—*Pavel I. Dumitrescu, Mircea Bobârnac, Lăzărescu Fl. Ştefan, Dobrescu Băbici, Ion I. Iliescu, Const. Gh. Beşliu, Dragomirescu-Buzne Eduard, Bogdan M., I. Flichstein-*Cernăuţi, *Ion S. Antoniu.*

122.—D-nii: *I. Coşereanu, Andrei Miclescu, Traian A. Dordea, Bogdan M., Florian Er. Georgescu, Ionescu I. Ilie, Leon Weiss, Isaiia Nicolescu,*

123.—D-nii: *Mihai Alexandrescu, E. Iliescu, Georgescu C. Ion, Ion S. Antoniu, Bogdan M., V. Dan, Ernest Oprişan, A. Urzică, Pavel S. Dumitrescu, Dobrescu Babici, D. Hrysanidi, M. Cocorandu* Braşov, *Ion G. Ionescu, Ionescu I. Ilie.*

INSTITUT DE ARTE GRAFCE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMIȘOARA.

ANUL II. 15 OCTOMBRIE 1922 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. INCORONAREA
2. MAIOR O. BUGEANU. CUM SE POT GASI UNELE IDENTITATI
3. PROBLEME REZOLVATE.
4. RECREATIUNI MATEMATICE.
5. NOTE MATEMATICE.
6. CHESTIUNI DE EXAMEN
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1922

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că dela 1 Octombrie 1922, face parte din comitetul Revistei Matematice și d-l **Petre Sergescu**, profesor la liceul Traian din T.-Severin.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **Ing. M. Vasiliu** sub-directorul Fabricei de Tutun, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara

---

ANUL II. — NO. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1922

BIBLIOTECA „ASTRA"

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Inginer M. VASILIU, Fabrica de Tutun, Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

INCORONAREA

Astăzi 15 Octombrie 1922, întreaga viață Românească serbează Incoronarea primului Rege al Tuturor Românilor, **Ferdinand I,** *căruia istoria va ști să-l găsească și va trebui să-l găsească calificativul cel mai vrednic, dedus din patriotismul Său mare, din bunătatea Sa caldă, din loialitatea Sa sinceră, din vitejia Sa de erou.*

După lupte grele, după mari sacrificii și jertfe făcute de Neamul Românesc pentru înfăptuirea definitivă a Unirei, trebue să privim Incoronarea ca pe un simbol asigurător, că sacrificiile și jertfele făcute nu au fost perdute. Ele au condus la strângerea la un loc a tuturor energiilor neamului, energii care strâns unite între ele și în jurul Tronului vor putea lucra mai cu folos pentru propășirea Patriei.

Știința teoretică și aplicată, în general, și-a pus la contribuție o bună parte din capitalul ei pentru succesul Unirei și acum își dă neîncetat obolul pentru consolidarea păcei. Revista Matematică din Timișoara, *în particular, își însumează obolul ei științific și național, care nu pot fi despărțite, la acela al științelor teoretice și aplicate, în scopul de a ajuta la educația științifică și națională a tinerilor generații din România întregită. Din acest punct de vedere și din faptul că* Revista Matematică din Timișoara, *vlăstar al manifestațiunei științifice românești și fruct al Unirei, a răsărit și propășește cu puternică înflăcărare pe teritoriul uneia din provinciile liberate, suntem fericiți să luăm parte la cel mai înălțător simbol al Unirei, la* Incoronarea *primului Rege al Tuturor Românilor și făcând cor cu întregul neam să aducem prinosul nostru de omagiu și de credință MM. LL.* **Regelui Ferdinand I, Reginei Maria** *și întregei Dinastii a României Tuturor Românilor.*

COMITETUL DE REDACTIE

CUM SE POT GASI UNELE IDENTITAȚI

PRIN DESVOLTAREA DETERMINANȚILOR

Este cunoscut că se pot găsi identități prin întrebuințarea determinanților. Desvoltând un determinant în două moduri și egalând rezultatele se va obține o identitate. Iată câteva exemple de asemenea identități algebrice.

1. Fie determirantul:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Dacă îl desvoltăm direct avem:

$$D = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

Acest determinant se poate desvolta și astfel: adăugăm la coloana 1 coloana 2 și 3:

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

De unde

$$D = (a+b+c)(bc+ca+ab-c^2-a^2-b^2).$$

Comparând această desvoltare a determinantului cu cea directă obținem identitatea:

$$3abc - a^3 - b^3 - c^3 = (a+b+c)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2).$$

2. Fie determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Dacă îl desvoltăm direct obținem:

$$D = (a-b-c)(b-c-a)(c-a-b) + 16abc - 4ac(b-c-a) - 4bc(a-b-c) - 4ab(c-a-b).$$

Acest determinant se poate desvolta și astfel adăugăm la linia 1 linia 2 și 3, obținem:

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Scădem coloana 1 din coloanele 2 și 3

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

De unde

$$D = (a+b+c)^3.$$

Egalând această desvoltare cu cea directă obținem identitatea:

$$(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b) + 16abc - 4ac(b-c-a) - 4bc(a-b-c) - 4ab(c-a-b) = (a+b+c)^3.$$

3. Fie determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{bc}{b+c} & b & c \\ a & -\frac{ca}{c+a} & c \\ a & b & -\frac{ab}{a+b} \end{vmatrix}$$

Desvoltându-l direct avem:

$$D = -\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 2abc - \frac{c^2a^2}{c+a} - \frac{a^2b^2}{a+b} - \frac{b^2c^2}{b+c}$$

Acest determinant îl putem desvolta și în modul următor: înmulțim coloana 1 cu $b+c$, a 2 cu $c+a$, a 3 cu $a+b$

$$(a+b)(b+c)(c+a)D = \begin{vmatrix} -bc & b(c+a) & c(a+b) \\ a(b+c) & -ca & c(a+b) \\ a(b+c) & b(c+a) & -ab \end{vmatrix}$$

Din linia 3 scădem linia 2, din a 2 pe 1, obținem:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\,D=$$

$$\begin{vmatrix} -bc & b(c+a) & c(a+b) \\ ab+bc+ca & -(ab+bc+ca) & 0 \\ 0 & +(ab+bc+ca) & -(ab+bc+ca) \end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)^2\begin{vmatrix} -bc & b(c+a) & c(a+b) \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

La coloana 2 adunăm coloana 1; obținem:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\,D=$$

$$(ab+bc+ca)^2\begin{vmatrix} -bc & ab & c(a+b) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$-(ab+bc+ca)^2\begin{vmatrix} ab & c(a+b) \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$(ab+bc+ca)^3.$$

De unde

$$D=\frac{(ab+bc+ca)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Egalând cele două desvoltări obținem identitatea:

$$-\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}+2abc-\frac{c^2a^2}{c+a}-$$

$$\frac{a^2b^2}{a+b}-\frac{b^2c^2}{b+c}=\frac{(ab+bc+ca)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

sau

$$-2a^2b^2c^2+2abc(a+b)(b+c)(c+a)-$$

$$c^2a^2(a+b)(b+c)-a^2b^2(b+c)(c+a)-$$

$$b^2c^2(c+a)(a+b)=(ab+bc+ca)^3.$$

4. Fie determinatul Vandermonde:

$$D=\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

Dacă îl desvoltăm urmând linia 1, obținem:

$$D=a^3\begin{vmatrix} b^2 & c^2 & d^2 \\ b & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}-b^3\begin{vmatrix} a^2 & c^2 & d^2 \\ a & b & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+c^3\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & d^2 \\ a & b & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}-d^3\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D=a^3(b-c)(b-d)(c-d)-$$

$$b^3(a-c)(a-d)(c-d)+c^3(a-b)(a-d)(b-d)-$$

$$d^3(a-b)(a-c)(b-c)$$

Comparând această desvoltare cu cea cunoscută obținem identitatea:

$$a^3(b-c)(b-d)(c-d)-b^3(a-c)(a-d)(c-d)+$$

$$c^3(a-b)(a-d)(b-d)-d^3(a-b)(a-c)(b-c)=$$

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

5. Fie determinantul (Culegere de probleme).

$$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}=$$

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x+a_1+a_2+a_3)$$

Desvoltându-l urmând linia 1 obținem:

$$D=x\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 \\ a_2 & x & a_3 \\ a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}-a_1\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x & a_3 \\ a_1 & a_3 & x \end{vmatrix}+$$

$$+a_2\begin{vmatrix} a_1 & x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} a_1 & x & a_2 \\ a_1 & a_2 & x \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= x\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 \\ a_2 & x & a_3 \\ a_2 & a_3 & x \end{vmatrix} - a_1^2\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & x-a_2 & 0 \\ 0 & a_3-a_2 & x-a_3 \end{vmatrix} +$$

$$a_1a_2\begin{vmatrix} 1 & x & a_3 \\ 0 & a_2-x & 0 \\ 0 & a_2-x & x-a_3 \end{vmatrix} - a_1a_3\begin{vmatrix} 1 & x & a_2 \\ 0 & a_2-x & x-a_2 \\ 0 & a_2-x & a_3-a_2 \end{vmatrix}$$

de unde:

$$D = x(x-a_2)(x-a_3)(x+a_1+a_2) -$$
$$a_1^2(x-a_2)(x-a_3) + a_1a_2(a_3-x)(x-a_3) -$$
$$a_1a_3[(a_2-x)(a_3-a_2) + (x-a_2)^2]$$

Egalând cele două desvoltări obținem identitatea:

$$x(x-a_2)(x-a_3)(x+a_1+a_2) -$$
$$a_1^2(x-a_2)(x-a_3) - a_1a_2(x-a_2)(x-a_3) -$$
$$a_1a_3[(x-a_2)^2 + (x-a_2)(a_2-a_3)] =$$
$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x+a_1+a_2+a_3)$$

sau

$$x(x-a_2)(x-a_3)(x+a_1+a_2) -$$
$$-(a_1^2+a_1a_2)(x-a_2)(x-a_3) -$$
$$a_1a_3[(x-a_2)^2 + (a_2-a_3)(x-a_2)] =$$
$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x+a_1+a_2+a_3)$$

6. Fie determinantul (Culegere de probleme).

$$D = \begin{vmatrix} a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c)$$

Desvoltându-l urmând linia 1 obținem:

$$D = a_4\begin{vmatrix} b^2 & c^2 & d^2 \\ b & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - b^4\begin{vmatrix} a^2 & c^2 & d^2 \\ a & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+c^4\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & d^2 \\ a & b & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - d^4\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^4(b-c)(b-d)(c-d) - b^4(a-c)(a-d)(c-d)$$
$$+c^4(a-b)(a-d)(b-d) - d^4(a-b)(a-c)(b-c)$$

Comparând această desvoltare cu cea cunoscută deducem identitatea:

$$a^4(b-c)(b-d)(c-d) - b^4(a-c)(a-d)(c-d) +$$
$$c^4(a-b)(a-d)(b-d) - d^4(a-b)(a-c)(b-c) =$$
$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

Notă. Se poate deduce în același mod și identități trigonometrice.

PROBLEME REZOLVATE

65. — *Fie* AA_1 *și* AA' *mediana și bisectoarea unui triunghiu. Pe latura* BC *luăm* $A_1A'' = A_1A'$, *prin* A'' *ducem o paralelă la latura* AC *care taie mediana* DA_1 *în* D. *In ipoteza* BC *constantă și fixă,* $\hat{A}$ *constant să se găsească locul intersecției* (AA', BD).

AUREL NICOLAU

1. — După problema No. 1455 din „Gazeta Matematică", vol. XV dreapta BD este întotdeauna perpendiculară pe AA'. In acest caz locul va fi un cerc descris pe BP ca diametru, P fiind punctul fix prin care trece necontenit bisectrița AA', adică jumătatea arcului mic BC a cercului circumscris triunghiului ABC. O asemenea soluție a încercat să dea d-l *Popescu A. Ștefan* cl. VI, liceul din Pitești, pornind bine, însă ajungând la rezultatul că locul căutat este cercul de diametru BA', uitând că punctul A' este variabil.

2. — Soluție dată de d-l *Tiberiu Popoviciu* cl. VI liceul „Moise Nicoară" Arad.

Fie F punctul de intersecție (A A', B D). Observând că A A' trece printr'un punct fix P, mijlocul arcului inferior B C al cercului circumscris triunghiului A B C. Dreapta A D este paralelă cu AB de oarece $\frac{A_1A''}{A_1C}=\frac{A_1D}{A_1C}=\frac{A_1A'}{A_1B}$ și atuncea triunghiul A'D A'' este asemenea cu triunghiul A B C, în care dar paralela D E la bisectrița A A' va fi și ea bisectrița unghiului A'D A''. Atuncea scrim rapoartele:

$$\frac{EA'}{EA''}=\frac{DA'}{DA''}=\frac{AB}{AC}=\frac{A'B}{A'C}=\frac{A'B}{A''B}$$

de unde să vede, dacă considerăm pe cele extreme, că dreapta B D este bisectrița exterioară a unghiului A'D A'' și dar este perpendiculară pe bisectrița interioară D E și deci pe paralela ei A A'. Așa stând lucrurile, punctul F se va găsi necontenit pe cercul descris pe B P ca diametru.

Soluții bune analitice au dat d-nii: *I. Coșereanu, Puiu Juster* studenți anul I, Școala Politechnică din Timișoara, *Iosif Ereifeld* cl. VIII lic. „Laurian" Botoșani.

D-l *Stoenescu I. Al.* a dat o soluție geometrică și una analitică ambele necomplete. Soluție slabă a dat d-l *Nicu Pârâianu* Pitești, găsind că locul este cercul descris pe B A' ca diametru unde punctul A' piciorul bisectriței este necontenit variabil.

96. — *Să se găsească expresiunea volumului cuprins între o sferă și un con circumscris ei, în funcție de raza r a sferei și de distanța d dela vârful conului la centrul sferei. Să se arate că maximul acelui volum când distanța d este constantă și raza r variabilă este* $\frac{1}{8}$ *din volumul sferei în momentul când are loc maximul.*

M. Nicolau

Dacă notăm cu t, lungimea generatricelor conului circumscris și cu a raza cercului de contact între conul circumscris și sferă avem:

$$t^2=d^2-r^2$$

$$a^2=\frac{r^2(d^2-r^2)}{d^2}$$

Fie V volumul conului ce are ca bază cercul de contact și ca vârf, tocmai vârful conului circumscris. Avem:

$$V=\frac{\pi r^2(d^2-r^2)^2}{d^3}$$

Fie v volumul calotei sferice detașată de planul cercului de contact. Atunci avem:

$$v=\frac{\pi r^3(d-r)^2(2d+r)}{3d^3}$$

Atunci volumul în chestiune este diferența:

$$V-v=\frac{\pi r^2(d^2-r^2)^2}{3d^3}-\frac{\pi r^3(d-r)^2(3d+r)}{3d^3}$$

sau făcând reducerile necesare:

$$w=V-v=\frac{\pi r^2(d-r)^2}{3d}$$

Aceasta este expresiunea în funcție de r și d a volumului cerut. Pentru a vedea maximul acestui volum când $d=$ const. și r variabil, procedăm

$$\frac{dw}{dr}=\frac{\pi}{3d}\left\{2r(d-r)^2-2r^2(d-r)\right\}=0$$

$$\frac{dw}{dr}=\frac{2\pi r(d-r)(d-2r)}{3d}=0$$

Rezultă atunci $r=0$ $d=r$ $d=2r$. Pentru primele două cazuri avem un minimum $w=0$ iar pentru al treilea avem un maximum

$$w=\frac{\pi r^2r^2}{6r}=\frac{\pi r^3}{6}$$

Volumul sferei este: $w_s=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{8\pi r^3}{6}$

$$\frac{w}{w_s}=\frac{\pi r^3}{6}:\frac{8\pi r^3}{6}=\frac{1}{8}$$

$$w=\frac{1}{8}w_s$$

Au dat soluțiuni bune, d-nii: *Mircea Gh. Sorescu* și *Octav Ulman* absolvenți ai lic. „Internat" Iași, *Alexandru Pollak* cl. VIII lic. „Confesional Israelit" Timișoara, *Eugen Ionică* cl. VII liceul din Brașov, d-l *Pincu Katz* cl. VII liceul din Galați, a dat o soluție necomplectă.

107. — *Se dă în plan patru drepte:* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *şi* Δ_4 *în aşa fel că punctul de intersecţie* A *al dreptelor* Δ_1 *şi* Δ_2, *precum şi punctul de intersecţie* B *al dreptelor* Δ_3 *şi* Δ_4 *sunt în afară de cadrul desenului. Să se traseze în plan o dreaptă oarecare* Δ, *paralelă cu* AB.

M. NICOLAU

Luăm planul dat ca plan orizontal de proecţiune şi trasăm în el o dreaptă $x\,y$, convenabil aleasă, ca linie de pământ şi care să taie toate dreptele date Δ_1, Δ_2, Δ_3 şi Δ_4 respectiv în punctele α_1, α_2, α_3 şi α_4. Fie $(m\,m')$ un punct ales arbitrar, pe care pentru simplicitatea problemei îl presupunem în planul vertical de proiecţiune. Dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3 şi Δ_4 din planul orizontal determină fiecare din ele împreună cu punctul $(m\,m')$ patru plane: $P'_1\,\alpha_1\,P_1$, $P'_2\,\alpha_2\,P_2$, $P\alpha_3\,P_3$ şi P'_4, a căror urme orizontale sunt chiar dreptele date şi a căror urme verticale trec toate prin m'. Planele $P'_1\,\alpha_1\,P_1$ şi $P'_2\,\alpha_2\,P_2$ se vor tăia după o dreaptă care va trece prin $(m\,m')$. Pentru a mai determina încă un punct al acelei drepte de intersecţie ne servim pe planul auxiliar de front F_1 care taie planele $P'_3\,\alpha_1\,P_1$ şi $P'_2\,\alpha_2\,P_2$ respectiv după frontalele: $(a\,p,\,a'\,p')$ şi $(b\,p,\,d'\,p')$ care se taie în punctul $(p\,p')$. Dreapta $(m\,p,\,m'\,p')$ este intersecţia planelor $P'_1\,\alpha_1\,P_1$ şi $P'_2\,\alpha_2\,P_2$. In mod analog se găseşte că intersecţia planelor $P'_3\,\alpha_3\,P_3$ şi $P'_4\,\alpha_4\,P_4$ este dreapta $(m\,q,\,m'\,q')$. Dreapta $(m\,p,\,m'\,p')$ fiind conţinută în planele $P'_1\,\alpha_1\,P_1$ şi $P'_2\,\alpha_2\,P_2$, va trebui să aibă urma orizontală în punctul A, intersecţia dreptelor Δ_1 şi Δ_2. Analog $(m\,q,\,m'\,q')$ fiind conţinută în planele $P_3\,\alpha_3\,P_3$ şi $P'_4\,\alpha_4\,P_4$, va trebui să aibă urma sa orizontală în punctul B, intersecţia dreptelor Δ_3 şi 4_4. Considerând planul format de dreptele $(m\,p,\,m'\,p')$ şi $m\,q,\,m'\,q')$ concurente în $(m\,m')$, el va avea ca sumă orizontală tocmai dreapta AB. Orice orizontală din acest plan, se va proiecta orizontal după o dreaptă paralelă cu AB. Prin ajutorul planului auxiliar orizontal H'_1 am obţinut orizontala $(r\,p,\,r'\,p')$ din acel plan şi deci $r\,p$ va fi paralelă Δ la AB, cerută de problemă.

Notă. Au rezolvit problema nu prin geometrie descriptivă ci prin geometrie pură, d-nii: *I. Şerbănescu, Florea Negretzu, Gh. Crăiniceanu, N. Dospinoiu* conductor de lucrări publice, *Scoruşeanu I. Eugen, Brătescu H. Mihail, Măru Dumitru, Tiberiu Popoviciu* şi *I. M. Focşeneanu.*

D-l *Florea Negretzu* a dat şi o soluţie trigonometrică iar d-l *Gh. I. Soresca* a dat una algebrică.

D-i *I. Şerbănescu* a extins problema şi în spaţiu, însă numai a schiţat soluţia geometrică.

Amintim colaboratorilor noştri, că trebuia să dea soluţie prin geometrie descriptivă şi tocmai o astfel de soluţie nu sa primit dela nimeni.

117. — *Fie*

$$\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}-n\sqrt{2}},$$

$$\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}-n\sqrt{2}},\quad \gamma = -\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}$$

Să se arate că dacă:

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\omega$$

rezultă

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=\omega^2.$$

A. TH. NICOLAU

Soluţie dată de d-ra *Anna Wetter* cl. V liceul „Dragoş-Vodă" Câmpulung Bucovina.

Ridicăm la patrat egalitatea:

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\omega$$

de unde:

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=\omega^2$$

cum $\alpha.\beta.\gamma\neq 0$ rezultă.

$$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

Făcând să dispară radicalii dela numitor în α şi β trebue să avem:

$$\frac{m\left(\sqrt{m^2+n^2}+n\sqrt{2}\right)}{m^2-n^2}-\frac{n\left(\sqrt{m^2+n^2}+m\sqrt{2}\right)}{m^2-n^2}-\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}=0$$

$$\frac{(m-n)\sqrt{m^2+n^2}}{m^2-n^2}-\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}=0$$

Au dat, încă, asemenea soluţii şi d-nii: *Cristea Goilav* student Tecuci, *Ion Coşereanu Em. V. Soceanu, Eugen Crăinicescu, Octav Ulmann* Şcoala Politechnică din Timişoara, *Pavel I. Dumitrescu* stud. Piteşti, *I. N. Georgesca-Val*

Școala de Artilerie Timișoara, *I. Flickstein* cl. VIII lic. III Cernăuți, *Traian A. Dordea* cl. VIII particular, *Alexandrescu I. Mihai* cl. VIII Constanța, *Pincu Katz* Galați și *M. Gh. Săvescu* Iași. Din cl. VIII au rezolvft problema următorii d-ni: *Lăzărescu Fl. Ștefan* Giurgiu, *I. M. Focșeneanu* „M-rea Dealul", *Tiberiu Popoviciu* lic. „Moise Nicoară" Arad, *Ionescu I. Ilie* Caracal, *Const. E. Georgescu* București, *Silion Gh. Ion* Câmpina, *Mehlmann Theodor* lic. „Dragoș-Vodă" Câmpulungul-Moldovenesc Bucovina. Din cl. VI liceală, au rezolvit problema d-nii: *Gabrielescu C. Vasile* Brăila, *Dragomir N. Ioan* București, *Florian Er. Georgescu*, *I. Stoenescu* București, *Alexandru Tauber* Botoșani, *Emil Ștefănescu*, *Murariu Petru* lic. „Coriolan Brediceanu" Lugoj, *D. Hrisanidi* Constanța. Din cl. V liceală d-l *Ionescu T. Carol* lic. „Cantemir-Vodă" București, precum și d-l *M. Cocorandu* liceul din Brașov.

124. — *Să se rezolve sistemul:*

$$x^2 - c^2 y^2 = 1$$
$$\alpha x^2 + c^2 y z = 0$$
$$\alpha^2 x^2 - c^2 z^2 + c^2 = 0.$$

Ce condiție trebue să îndeplinească α și c pentruca soluția să fie reală.

TH. ANGHELUTA

Soluție dată de d-nii *I. N. Georgescu-Val* și *Tuducescu N.*

Din ecuația doua scoatem:

$$z = -\frac{\alpha x^2}{c^2 y}$$

această valoare substituită în ecuația treia dă:

$$\alpha^2 x^2 - \frac{\alpha^2 x^4}{c^2 y^2} + c^2 = 0 \qquad \text{sau:}$$

$$\alpha^2 x^2 \left(1 - \frac{x^2}{c^2 y^2}\right) + c^2 = 0.$$

Din prima deducem: $1 - \frac{x^2}{c^2 y^2} = -\frac{1}{c^2 y^2}$; deci: $\frac{\alpha^2 x^2}{c^2 y^2} - c^2 = 0$. Această ecuație împreună cu prima dă sistemul:

$$\alpha^2 x^2 - c^4 y^2 = 0$$
$$\alpha^2 x^2 - c^2 \alpha^2 y^2 = \alpha^2$$

și scăzând ecuațiile una dintr'alta: $c^2 y^2 (c^2 - \alpha^2) = \alpha^2$

sau: $$y^2 = \frac{\alpha^2}{c^2 (c^2 - \alpha^2)}$$

Deducem apoi soluțiile sistemului:

$$x = \pm \frac{c}{\sqrt{c^2 - \alpha^2}}; \quad y = \pm \frac{\alpha}{c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - \alpha^2}}, \quad z = -x.$$

Ca soluțiile să fie reale trebue ca: $c^2 - \alpha^2 > 0$ sau: $-\alpha > c > \alpha$.

II. Soluție dată de d-l *Dobrescu Filip cl. VI* Caracal.

Din ecuația I scoatem: $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{c^2}}$, care înlocuită în ecuația II ne dă:

$$\alpha^2 x^4 - c^2 z^2 (x^2 - 1) = 0$$

de unde:

$$z^2 = \frac{\alpha^2 x^4}{c^2 (x^2 - 1)}$$

care valoare înlocuită în ecuația III, dă ecuația:

$$\alpha^2 x^2 - \frac{c^2 \alpha^2 x^4}{c^2 (x^2 - 1)} + c^2 = 0 \qquad \text{sau:}$$

$x^2 (c^2 - \alpha^2) = c^2$ de unde $x = \frac{c}{\pm \sqrt{c^2 - \alpha^2}}$

Inlocuind valoarea lui x în celelalte ecuații și ținând seama de faptul că produsul yz trebue să fie negativ, adică y și z de semne contrare, obținem:

$$y = \pm \frac{\alpha}{c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - \alpha^2}} \qquad z = \mp \frac{c}{\sqrt{c^2 - \alpha^2}}$$

Ca soluțiile să poată exista trebuie ca:

$$c^2 - \alpha^2 > 0 \quad \text{adică:} \quad |c| > |\alpha|$$

Urmând aceiași cale au rezolvit bine problema d-nii: *Andrei Miclescu* școala de artilerie Timișoara; cl. VII: *Florea Negretzu* Pitești, *Ionescu Ilie* lic. „Ion Asan" Caracal, *Gh. Stănciulescu* Pitești; cl. VI: *Frătici Ioan* lic. din Brașov; cl. V: *Solomon Wilhelm*, *Emil Bercovici* lic. „Matei Basarab", *Ion Coșereanu* lic. din Piatra-Neamț.

III. Soluție dată de d-l *Gabrielescu V.* cl. V, lic. N. Bălcescu Brăila.

Inmulțim ecuația I cu α și o scădem din a II

(4) $$c^2 y (\alpha y + z) = -\alpha$$

Inmulţim (2) cu α şi scădem pe (3) din (2)' obţinând:

$$c^2 z(\alpha y + z) = c^2 \quad (5)$$

Impărţim (4) cu (5) şi obţinem:

$$\frac{y}{z} = -\frac{\alpha}{c^2} \quad \text{sau:} \quad c^2 y = -\alpha z.$$

Ecuaţia (2) se mai poate scrie: $c^2 y z = -\alpha x^2$; de unde împărţind-o cu: $c^2 y = -\alpha z$ obţinem:

$$\frac{1}{z} = \frac{z}{x^2} \quad \text{sau} \quad x^2 = z^2 \quad \text{sau} \quad x = \pm z.$$

Inlocuind pe z^2 prin x^2 în (3), avem:

$$x^2(c^2 - \alpha^2) = c^2 \text{ de unde: } z = x = \pm \frac{c}{\sqrt{(c+\alpha)(c-\alpha)}}$$

Pe y îl aflăm făcând înlocuirile în (2), ţinând seamă că $y z$ trebue să fie negativ deci:

$$y = \mp \frac{\alpha}{c\sqrt{(c+\alpha)(c-\alpha)}}$$

Există soluţii dacă:

$$(c+\alpha)(c-\alpha) > 0, \quad \text{adică:} \quad -c < \alpha < c.$$

In acelaşi mod au mai rezolvit d-nii: *Propst I.* cl. VIII T.-Severin; cl. VII: *Popescu Ştefan* şi *I. Lăzărescu* liceul din Piteşti, *Micuţă Teodoru* Huşi; cl. VI: *Emil Ştefănescu* „Spiru Haret" Bucureşti.

Au rezolvit-o foarte bine pe alte căi d-nii: *Tiberiu Popoviciu* lic. „Moise Nicoară" Arad, *Mehlmann Th.* lic. "Dragoş-Vodă" Câmpulung (Bucovina), *I. N. Iancu* liceul din Târgovişte: toţi din cl. VII; cl. VI: *Stoenescu I.* lic. „Cantemir Vodă", *Brătescu M., Al. Brăileanu, Măru Dumitru, P. Murariu* Lugoş, *Cristea Goilav, Lăzărescu Fl. Ştefan, I. Flichstein*-Cernăuţi, *V. Dan, Florian Er. Georgescu, Const. Beşliu, Mih. Stamatiu, Iulian M. Nicolau, Pavel S. Dumitrescu, Focşăneanu I. M., M. Cocorandu.*

A dat numai unele soluţii d-l *Cr. Rigani* Constanţa.

RECREAŢIUNI MATEMATICE

1- — *Cum putem ghici, rezultatul unor calcule, pe care o persoană le face în gând?*

Se va spune astfel persoanei: Alegeţi-vă un număr în gând. D-l X vă mai dă încă pe atâta. Socotiţi cât face. Subsemnatul vă mai dă $2n$ (de exemplu); împărţiţi totul la 2, daţi înapoi partea d-lui X şi vă va rămâne încă numărul n; adică i se va spune exact restul. Persoana să mire pentru un lucru aşa de bine ghicit. Explicaţia este foarte simplă şi să justifică prin formula:

$$\frac{x + x + 2n}{2} - x = n$$

Formula se mai poate încă complica, fără să-şi schimbe valoarea, odată cu expunerea respectică persoanei. De exemplu

$$\frac{x + px + (p+1)n}{p+1} - x = n$$

OCTAV ULMAN
Student Politechnica din Timişoara

Notă. Aşteptăm cu plăcere dela corespondenţii noştri formule de acest fel, care se pot pune în practică şi care pune în mirare o persoană sau o societate întreagă. Cum s'ar putea generaliza acest caz, pentru mai multe persoane, a căror socoteli, se doresc a se ghici odată?

M. V.

NOTE MATEMATICE

Asupra triunghiurilor în care laturile formează o proporţie armonică. — S'au dat în „*Gazeta Matematică*„ şi „*Revista Matematică din Timişoara*" relaţiuni asupra triunghiurilor în care laturile formează o progresie aritmetică sau o progresie geometrică. In cele ce urmează voi da câteva relaţiuni asupra triunghiurilor în care laturile formează o proporţie armonică.

Avem: $$b = \frac{2ac}{a+c} \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \quad (2)$$

I. Inlocuind în (2) pe a, b, c prin valorile lor $2R \sin A$, $2R \sin B$, $2R \sin C$, obţinem:

$$\frac{2}{\sin B} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin C} \quad (3)$$

deci: *sinusurile unghiurilor opuse sunt în proporţie armonică.*

II. Inlocuind tot în (2) pe a, b, c, prin $\frac{2S}{h_a}$, $\frac{2S}{h_b}$, $\frac{2S}{h_c}$, avem:

$$2h_b = h_a + h_c, \qquad (4)$$

deci: *înălțimele sunt în progresie aritmetică.*

III. Avem:

$a = r\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$, $b = r\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$

$c = r\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right)$, deci înlocuind în (2), obținem:

$$\frac{2}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}} + \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}}$$

$$\therefore\ 2\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2} = \operatorname{cotg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} \qquad (5)$$

deci: *patratele cotangentelor semi-unghiurilor fac o progresie aritmetică.*

IV. Inlocuind în relațiunea (5) pe $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$ prin valorile lor $\frac{p}{r_a}$, $\frac{p}{r_b}$, $\frac{p}{r_c}$, obținem:

$$\frac{2}{r_b^2} = \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_c^2} \qquad (6)$$

deci: *patratele razelor cercurilor exînscrise formează o proporție armonică.*

V. Impărțind relațiunea (4) prin $h_a\, h_b\, h_c$, obținem:

$$\frac{2}{h_a\, h_c} = \frac{1}{h_a\, h_b} + \frac{1}{h_b\, h_c} \qquad (7)$$

deci: *produsele înălțimilor două câte două fac o proporție armonică.*

VI. Avem relațiunea:

$$h_a + h_b + h_c = \frac{ab + bc + ca}{2R} \qquad (8)$$

și ținând seama de (1) și (4), avem:

$$h_a + h_c = \frac{ac}{R} \quad \text{și} \quad h_b = \frac{ac}{2R}$$

I. T. RIZESCU
(elev liceul Constanța)

Proba unor operațiuni aritmetice. Metoda dată pentru proba înmulțirii a 2 numere poate fi extinsă asupra unui produs de mai mulți factori și în cazul particular când avem de ridicat un număr la o putere oarecare, ea devine: Se adună odată sau de mai multe ori cifrele numărului dat pânăce se capătă un număr de o singură cifră, se ridică acest număr la puterea respectivă, se procedează cu rezultatul în modul arătat mai sus și dacă numărul astfel obținut este acelaș cu cel pe care îl căpătăm reducând la o singură cifră rezultatul ce voim să-l verificăm, operația este bună. In cazul extragerii unei rădăcini, proba se face astfel: Se reduc la o singură cifră numărul căpătat ca rădăcină și restul, se ridică numărul corespunzător rădăcinei la puterea corespunzătoare indicelui radicalului, se adună cu numărul obținut la rest, se reduce la o singură cifră prin adunări succesive ale cifrelor și dacă numărul în sfârșit aflat este acelaș ca acela ce-l căpătăm prin reducerea la o singură cifră, a numărului dat, operația este bună.

BUSILA ADRIAN

Fiind date șirurile de numere pozitive,

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_m,\quad b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots b_n$$

în care avem: $m > n$ *și* $\Sigma a > \Sigma b$, *să se găsească condițiunea pentru ca să avem și:* $\Pi a > \Pi b$.

Să presupunem că toate numerile din aceste șiruri, ar fi respectiv egale cu cel mai mic număr dintre ele a și b, atunci să vedem când avem simultan:

1) $m > n$. 2) $ma > nb$. 3) $a^m > b^n$

Să presupunem apoi cel mai defavorabil caz pentru inegalitatea (3) adică $a^m = b^n$. De aci deducem că:

$b = a^{\frac{m}{n}}$ Și înlocuind în (2) găsim: $ma > na^{\frac{m}{n}}$

de unde:

$$a > \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{1-\frac{m}{n}}}$$

Dar $m > n$, deci $\frac{m}{n} > 1$, și atunci vom scrie:

$$a > \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{m}{n}-1}}$$

De unde vedem că:

pentru $\frac{m}{n} = 1 \ldots a > 1$

„ $\frac{m}{n} = 2 \ldots a > 2$

„ $\frac{m}{n} = 3 \ldots a > \sqrt{3}$

. . . . . .

. . . . . .

pentru $\frac{m}{n} = \infty \ldots a > e$

$$e = 2{,}7182\ldots$$

Inegalitatea (2) ne arată apoi că:

$$b < \frac{m}{n} a.$$

Din minimum lui $\frac{m}{n}$ e 1 și a lui a e tot 1, deci

$$b > 1.$$

Insă numerile $b_1, b_2, \ldots b_n$ sunt pozitive deci:

$$b > 0.$$

Așa dar condițiunea pentruca să avem simultan neegalitățile date este numai:

$$a > \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{m}{n}-1}}$$

Cum însă:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{m}{n}-1}} < e$$

urmează că mai simplu, condițiunea s'ar reduce la:

$$a > e$$

făcând abstracție de cazurile datorite diferenței:

$$e - \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{m}{n}-1}}$$

care sunt mult restrânse din cauza valoarei mici pe care o are.

LT. I. LINTES

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECHNICA DIN TIMIȘOARA

5 — 6 Octombrie 1922

ALGEBRA (lucrare scrisă)

1. Să se rezolve ecuația,

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

și în urmă să se studieze variațiunea funcțiunei,

$$y = \mathrm{L}\frac{x^3 + x^2 - 2}{10} - \operatorname{arc\,tg}(1 + x) - \frac{3x}{2}$$

L însemnând logaritm neperian.

2. Să se determine a astfel ca ecuația

(1) $$x^4 - a x^3 + 4 a x - 16 = 0$$

să aibă o rădăcină dublă, iar celelalte două rădăcini, egale și de semne contrare.

Se cere încă a se forma ecuațiunea ale cărei rădăcini sunt produsele două câte două a rădăcinelor ecuației (1), unde s'a înlocuit a cu valoarea determinată.

TRIGONOMETRIE (lucrare scrisă)

I

Să se demonstreze identitatea:

$$\sin 3a + \sin a = \frac{4 \sin a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

II

Să se calculeze elementele unui triunghiu în care se cunoaște baza, mediana și înălțimea corespunzătoare:

$$a = 325{,}2$$
$$m = 311{,}7$$
$$h = 245{,}3.$$

GEOMETRIE (lucrare scrisă)

A) Chestiuni obligatoare

Fie $x\,y$ diametrul O fix al unui cerc de rază 1. Se cere 1). Să se ducă o coardă A B de lungime 1 și care să

facă cu xy un unghiu de 45°. 2). Să se calculeze lungimile AC, CD și BD știind că C și D sunt proecțiile lui A și B pe xy. 3). Când figura se rotește în jurul lui xy ca să calculeze suprafața zonei născută de arcul AB, suprafața laterală a triunghiului de con născut de trapezul ABCD și a volumului acestui triunghiu de con. In calcule nu se va executa extragerea de rădăcină când se va întâlni $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

II.

Prin un punct I, luat pe diagonala AC a unui paralelogram ABCD, se duc paralele la laturile paralelogramului, care-l împart în alte 4 paralelograme. Să se demonstreze: 1) Că cele două paralelograme, care au punctele B și D ca vârfuri opuse, au suprafețele egale. 2) Că dreapta care unește centrele acestor 2 paralelograme are o direcție și o lungime constantă. 3) Că proprietățile precedente sunt adevărate și când punctul I este pe prelungirea lui AC.

B) Chestiuni facultative

I) Pe bisectoarea unghiului A a unui triunghiu ABC se iau punctele P și Q așa că $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = AB \cdot AC$. Să se arate că patrulaterul BPCQ este inscriptibil și că unghiurile APB, MPC sunt egale, M fiind mijlocul lui BC.

II) Se consideră 2 puncte A, B și toate grupurile de câte 2 cercuri O, O_1 care trec prin A și B și care fac între ele un unghiu dat α. Fie TT′ o tangentă comună la O, O_1 și a, b proiecțiile lui A și B pe TT′. Se cere: 1) Să se găsească locul geometric al punctelor T și T′ când razele celor 2 cercuri variază. 2) Să se demonstreze că produsul $Aa \times Bb$ este constant. 3) Să se arate că dacă φ este unghiul pe care-l face TT′ cu OO_1 atunci avem $\cos^2\varphi = \frac{2RR_1}{OO_1^2}(1 - \cos\alpha)$, unde R și R_1 sunt razele cercurilor O și O_1.

6, 7 și 8 Octombrie

GEOMETRIE (examenul oral)

1. Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater oarecare sunt vârfurile unui paralelogram.

2. Dacă C′ este punctul unde latura AB a unui triunghiu ABC este întâlnită de cercul exînscris unghiului A și dacă p este semiperimetrul triunghiului ABC atunci AC′ este egală cu p.

3. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând perimetrul $2p$, unghiul A și înălțimea h ce pleacă din A.

4. Să se construiască un triunghiu cunoscând centrele cercurilor exînscrise.

5. Să se demonstreze că suprafața unui patrulater ABCD este egală cu dublul suprafeței patrulaterului care are vârfurile în mijlocul laturilor patrulaterului ABCD.

6. Fie M un punct pe un cerc de diametru AB. Pe AM se ia un punct P așa că MP = MB. Se cere locul lui P când M descrie cercul dat.

7. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând laturile AC, AB și diferența unghiurilor B și C.

8. Dacă 2 triunghiuri A′B′C′, ABC au unghiurile A′ și A egale atunci raportul suprafețelor lor S′ și S este egal cu:

$$\frac{A'B' \times A'C'}{AB \times AC}$$

9. Baza unei piramide este un patrat de latură a iar fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale. Să se găsească înălțimea și volumul piramidei.

10. Să se demonstreze că într'un patrulater inscriptibil în un cerc, produsul distanțelor unui punct de pe cerc la 2 laturi opuse este egal cu produsul distanțelor acestui punct la celelalte 2 laturi.

11. Să se ducă tangenta comună la 2 cercuri.

12. Fie M mijlocul uneia din laturile neparalele a unui trapez și CD cealaltă latură neparalelă. Să se arate că suprafața trapezului este egală cu produsul dintre CD și depărtarea lui M la CD.

13. Dintr'un punct dat să se ducă o tangentă la un cerc.

14. Fie PT și PT′ tangentele duse din un punct P la un cerc. Să se arate că PT și PT′ sunt egale.

15. Să se calculeze unghiurile unui triunghiu știind că o bisectriță îl împarte în 2 triunghiuri isoscele.

16. Fie AB o coardă fixă a unui cerc O. Se construește un cerc tangent coardei AB și cu centrul într'un punct M de pe arcul AB. Tangentele duse din A și B la cercul M se întâlnesc într'un punct P. Se cere locul geometric al punctului P.

17. Fie OA și O′A′ două raze paralele în 2 cercuri O și O′. Să se arate că AA′ trece printr'un punct fix de pe OO′.

18. Să se calculeze raza cercului înscris în rombul ale cărui diagonale sunt $2a$ și $2b$.

19. Să se construiască un triunghiu cunoscând o mediană și unghiurile pe care ea le face cu laturile adiacente.

20. Să se construiască 2 lungimi cunoscând suma și diferența lor.

21. Idem cunoscând suma și produsul lor.

22. Idem cunoscând diferența și produsul lor.

23. Dintr'un punct P se duce tangenta PA și o secantă PBC la un cerc. Să se arate că $\overline{PA}^2 = PB \cdot PC$.

24. Intr'un cerc 2 coarde AB și CD se taie în P. Să se arate că $PA \times PB = PC \times PD$.

25. Printr'un punct A să se ducă o coardă AC într'un cerc de diametru AB, care să întâlnească tangenta dusă în B la cerc, într'un punct D așa că AC să fie egal cu BD.

26. Fie AA′, BB′ tangentele comune la 2 cercuri tangente exterior. Să se arate că patrulaterul AA′BB′ este inscriptibil.

27. Dacă R și R′ sunt razele cercurilor din problema precedentă, să se calculeze suprafața AA′BB′.

28. Fie AA′, BB′, CC′ înălțimele unui triunghiu și H punctul lor de întâlnire. Să se demonstreze că

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'.$$

29. La problema precedentă să se arate că unghiurile B′A′A și C′A′A sunt egale.

30. Să se demonstreze că înălțimele unui triunghiu sunt concurente.

31. Bisectoarea unghiului A a unui triunghiu întâlnește latura BC în D. Să se arate că $\frac{BD}{DB} = \frac{BA}{CA}$

32. Să se arate că cele 2 bisectoare ale unui unghiu sunt perpendiculare.

33. Să se arate că suprafața unui poligon regulat de n laturi înscris într'un arc de rază R este egală cu produsul

$$\frac{nR}{4} \times \text{coarda } \frac{2}{n}$$

coarda $\frac{2}{n}$ fiind coarda care subîntinde $\frac{2}{n}$ din cerc.

34. Să se calculeze latura unui triunghiu echilateral înscris într'un cerc.

35. Fiind date lungimile a și b să se construiască lungimea x știind că $x^2 = a \times b$.

36. Să se calculeze latura unui pentagon regulat.

37. Să se înlocuiască un poligon dat prin unul echivalent lui.

38. Pe latura BA a unui triunghiu ABC se ia un punct D așa că AD = AC. Să se arate că CD este paralelă cu bisectoarea unghiului B.

39. Să se arate că între cotele și înălțimea unui triunghiu dreptunghic avem relațiunea

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

40. Să se arate că pr este suprafața triunghiului al cărui perimetru este $2p$ și raza cercului înscris r.

(Va urma).

PROBLEME PROPUSE

176 — Să se calculeze în ce zi a săptămânei și-a făcut Mihai-Viteazul intrarea triumfală în Alba-Iulia și câte zile au trecut de atunci până la încoronarea de astăzi a M. S. Regelui Ferdinand I?

GRIGORE ZAPAN

177. — Dacă avem în numere întregi, relația:

$$\alpha^{2m} + \beta^{2n} = \gamma^{2p}$$

atunci expresiunea:

$$E = 2(\gamma^p - \alpha^m)(\gamma^p - \beta^n)$$

este un patrat perfect.

A. TH NICOLAU

178. — Să se arate, că suma factorilor, chiar repetați când intră la puteri, a produsului

$$x^2(10 - x)^3$$

este independentă de x.

LAZARESCU FL. ȘTEFAN

179. — Să se stabilească identitatea:

$$6\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k^2-1)(k^2-4)} = \frac{5}{24} - \frac{2n+1}{n(n^2-1)(n+2)}$$

V. ALACI

180. — Să se arate că suma a trei patrate, ridicată la puterea 2^n, se poate pune iarăși sub forma unei sume de trei patrate.

LT. I. LINTES

181. — Să se verifice identitatea:

$$(a^2 + x^2 + y^2)(b^2 + u^2 + v^2) - (ab - ux - vy)^2 = (au + bx)^2 + (av + by)^2 + (ux + vy)^2$$

E. ABASOHN

182. — Să se arate că expresiunea

$$E = \cos^2 x + \sin^2 y \sin^2 x (\text{ctg}^2 x + \text{ctg}^2 y) - \sin^2 y \cos^2 x$$

este independentă de x și y.

EMIL STEFANESCU

183. — Să se rezolve ecuația

$$x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2 + 4a - 6)x - 3(a^2 - 2a) = 0$$

M. VASILIU

184. — Pe diagonala AC a unui patrulater inscriptibil ABCD să se găsească un punct M, astfel ca AC să fie una din bisectoarele unghiului BMD.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

185. — Să se afle lucrul mecanic necesar pentru a scoate ancora dela 8 m adâncime până la 3 m deasupra apei. — Greutatea ancorei 3,9 tone, greutatea lanțului este 350 kg. pe metru liniar. Densitatea ferului 7,85.

C. C. TEODORESCU.

INFORMATIUNI

Examenul de admitere în anul I al Şcoalei Politechnice din Timişoara, s'a început în ziua de 5 Octombrie şi a ţinut până la 8 Octombrie.

Au fost înscrişi 159 candidaţi dintre care s'au prezentat la examen numai 139.

Aceştia sunt repartizaţi după provincii în felul următor:

Ardeal	34
Banat	17
Torontal . . .	2
Bucovina	8
Basarabia . . .	27
Vechiul Regat .	51
	139

Din aceştia din cauza lipsei de locuri, au fost primiţi în şcoală 91, fiind matriculaţi în anul I.

Cursurile şcoalei încep pentru cei trei ani de studiu şi divizia pregătitoare în ziua de Luni 30 Octombrie. In ziua de Duminecă 29 va avea loc deschiderea solemnă a cursurilor în prezenţa d-lui Ministru al Lucrărilor Publice. Cu această ocazie se va pune şi piatra fundamentală la noul pavilion al şcolii, a cărui clădire s'a început în vara aceasta şi care va fi terminat în cursul anului viitor.

——

Dintre corespondenţii „Revistei Matematice din Timişoara" s'au prezentat 26 candidaţi dintre care au reuşit următorii:

Angelescu I. C., Antistescu C. Vasile, Bănărescu A. Valeriu, Bărbat D. Bartolomeu, Beşliu Gh. Const., Bobârnac C. Mircea, Bocioacă R. Aurelian, Bredău T. Dumitru, Crăciun Gh. Milan, Crăinicescu A. Eugen, Coşereanu St. Ion, Gaef H. Gheorghe, Gael I. Ion, Iorgulescu Const., Juster Iosif, Mareş Corneliu, Melinte C. Grig., Muş T. Orest, Nicolau Gh. Alex., Popescu C. Vladimir, Rafiroiu Gh. Iosif, Stănculescu D. Sofronie, Stănescu A. Dumitru, Timotin S. Dumitru, Ulman I. Octav.

Unul singur a căzut la examen şi de aceia nici nu-i amintim numele. Tocmai această excepţie întăreşte regula că acei care s'au ocupat serios şi au muncit şi-au văzut succesul asigurat.

De aceia am şi publicat chestiunile date la examen, pentruca corespondenţii noştri acum în clasa 8-a să le rezolve, să-şi încerce puterile asupra lor, şi să caute a rezolva şi altele asemănătoare. Am publicat şi chestiuni date la examenul oral de geometrie pentruca să se vadă care este greutatea lor. şi fiecare să încerce să le rezolve cu titlul de exerciţii. Chestiunile orale de Algebră le-am publicat în anul trecut, vezi R. M. T., vol I, No. 8, pag. 124.

In numărul viitor vom publica soluţiile problemelor date la concurs ca fiecare să vadă modul cum trebuesc rezolvate şi redactate.

Rezultatul obţinut de către corespondenţii noştri este foarte bun, şi poate servi de exemplu viitorilor candidaţi pentru anul I al Şcolii.

——

Atragem atentinnea colaboratorilor noştri care doresc să lucreze la revistă şi să-şi vadă publicate soluţiile că urmează să se aboneze pe anul în curs. Până acuma am publicat toate soluţiile pentru încurajare, dar dela numărul viitor înainte nu vom mai publica de cât soluţiile corespondenţilor noştri. Acei care apreciază avantajele pe care le aduce revista şi satisfacţia de a-şi vedea sforţările încoronate de succes, nu vor găsi exagerată suma de 30 lei pe care trebuesc să o sacrifice pe altarul ştiinţei.

Abonamentele se trimet prin mandat poştal pe adresa:

Ing. C. Teodorescu, Subdirectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

——

In zilele dela 1 — 5 Octombrie a avut loc în Timişoara al doilea congres al Inginerilor din România. Şedinţele congresului au avut loc în sălile Şcoalei Politechnice, care a avut onoarea să ofere ospitalitate corpului technic român. Cu această ocazie s'a vizitat de către grupuri de congresişti localul şcolii, laboratoarele de chimie, fizică şi electricitate, colecţiile de mineralogie, mine şi instrumente de topografie, şi toţi au rămas cu cea mai frumoasă impresie de rezultatele bune obţinute în un timp aşa de scurt.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMIȘOARA.

ANUL II. 15 NOEMBRIE 1922 NO. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 30 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. E. CARAMAN DISCUTIA SI REZOLVAREA ECUATIEI DE GRADUL AL TREILEA CU AJUTORUL DISCRIMINANTULUI.
2. PROBLEME REZOLVATE.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. NOTE MATEMATICE.
5. CHESTIUNI DE EXAMEN
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1922

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Şcoalei Politechnice din Timişoara

---

ANUL II. — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1922

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. BLACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

DISCUȚIA ȘI REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL AL TREILEA CU AJUTORUL DISCRIMINANTULUI

E. CARAMAN
Prof. la lic. din Galați

1. Fie x_1, x_2, x_3, rădăcinele ecuației;

(1) $$f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c = 0.$$

Pentru a vedea în ce caz ecuația are o rădăcină multiplă să formează produsul:

(2) $$\Delta = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

al cărui patrat poartă numele de discriminantul ecuației.

Acesta, fiind o funcție simetrică de rădăcinile ecuației, — se poate exprima — după cum vom vedea îndată — cu ajutorul coeficienților.

Condiția necesară și suficientă ca ecuația să aibă o rădăcină multiplă este evident $\Delta = 0$ și se menține oricare ar fi gradul ecuației.

In cele ce urmează ne propunem să arătăm, că, pentru gradul al treilea, relația dintre ecuație și discriminant este și mai intimă: valoarea discriminantului, în funcție de coeficienți, determină natura rădăcinilor și conduce la rezolvarea ecuației.

2. Dispunem de mai multe metode pentru a calcula discriminantul ecuației în funcție de coeficienți. Vom schița aci o metodă cunoscută care duce repede la rezultat.

Punem discriminantul sub forma:

(3) $$\Delta^2 = -f'(x_1) \cdot f'(x_2) \cdot f'(x_3),$$

care se poate ușor stabili, observând că:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

$$f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3),\ f'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3),$$

$$f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

și înmulțind ultimile trei relații.

Pentru simplitatea calculelor considerăm ecuația sub forma redusă:

(4) $$f(x) = x^3 + p x + q = 0.$$

Făcând în (3) substituția $f'(x) = 3x^2 + p$, avem:

(5) $$\Delta^2 = -(3x_1^2 + p)(3x_2^2 + p)(3x_3^2 + p) =$$
$$-(27 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 9p \Sigma x_1^2 x_2^2 + 3p^2 \Sigma x_1^2 + p^3).$$

Prin schimbarea $x = \sqrt{y}$ ecuația (4) devine:

$$y^3 + 2p \cdot y^2 + p^2 \cdot y - q^2 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații fiind x_1^2, x_2^2, x_3^2, avem:

$$\Sigma x_1^2 = -2p,\ \Sigma x_1^2 x_2^2 = p^2,\ x_1^2 x_2^2 x_3^2 = q^2.$$

Introducând aceste valori în (5) căpătăm rezultatul urmărit;

(6) $$\Delta^2 = -(4p^3 + 27q^2)$$

In acelaș mod se poate stabili valoarea discriminantului ecuației (1) și se obține:

(7) $$\Delta^2 = a^2 b^2 - 4a^3 c + 18 a b c - 4 b^3 - 27 c^2.$$

3. Revenind la problema ce ne-am propus, vom arăta cum putem regăsi criteriile de recunoaștere a naturei rădăcinilor unei ecuații de gradul al treilea cu ajutorul discriminantului Δ^2. Demonstrația este așa de naturală, încât, se poate să fi fost făcută mai 'nainte, de altcineva.

Asupra rădăcinilor ecuației (1) avem de făcut următoarele ipoteze:

1°. Să presupunem că sunt reale și diferite. Din (2) se vede că Δ e real și deci $\Delta^2 > 0$.

2°. Dacă două rădăcini sunt egale, $\Delta = 0$, deci $\Delta^2 = 0$.

3°. In sfârșit, când ecuația are două rădăcini imaginare: $\alpha \pm i\beta$ și una reală γ, din (2) rezultă:

$$(8) \qquad \Delta^2 = -4\beta^2[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2 < 0.$$

Observând că premizelor considerate, corespund, relativ la semnul lui Δ^2, toate ipotezele posibile, putem conchide, prin reducere la absurd, că și reciprocele teoremelor enunțate sunt adevărate.

In definitiv, condițiile necesare și suficiente pentruca ecuația să aibă: rădăcini reale și diferite, cel puțin două rădăcini egale (toate reale), două rădăcini imaginare (una reală), sunt respectiv:

$$\Delta^2 > 0, \quad \Delta^2 = 0, \quad \Delta^2 < 0.$$

Utilizând valoarea (7) a discriminantului, aceste condiții se mai pot scrie:

$$-a^2b^2+4a^3c-18abc+4b^3+27c^2 \lessgtr 0.$$

Pentru ecuația (2) condițiile devin:

$$4p^3+27q^2 \lessgtr 0.$$

4. Rezolvarea ecuației de gradul al treilea este o problemă care a primit mai multe soluțiuni (*). Se reduce, mai întâi, ecuația (1) la forma (2), cu ajutorul schimbării: $x = y - \frac{a}{3}$. Rădăcinile celei dintâi se obțin dacă micșorăm cu $\frac{a}{3}$ rădăcinele celei de-a doua.

Rămâne dar să rezolvăm ecuația (2):

$$x^3+px+q=0.$$

Forma (8) a discriminantului ne sugerează o nouă soluție a problemei. In adevăr, comparând expresiile (6) și (8) avem relația:

$$(9) \qquad 4\beta^2[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2 = 4p^3+27q^2,$$

care permite rezolvarea ecuației prin metoda relațiilor dintre rădăcini și coeficienți.

O observare este necesară dela început și anume că, oricum ar fi rădăcinile ecuației, ele se pot pune sub forma:

$$x_1 = \alpha + i\beta, \; x_2 = \alpha - i\beta, \; x_3 = \gamma = -2\alpha.$$

In adevăr, α și β pot fi totdeauna determinați (reali sau imaginari) din primele două ecuații; iar a treia ecuație este o consecință a primelor două — de oarece $\Sigma x_1 = 0$.

Prin schimbarea $\gamma = -2\alpha$ relația (9) devine:

$$4\beta^2[9\alpha^2+\beta^2]^2 = 4p^3+27q^2.$$

De aci, avem succesiv:

$$\frac{\beta^2}{27}\left(9\alpha^2+\beta^2\right)^2 = \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

$$(10) \quad \therefore \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}\right)^3+3\alpha^2\frac{\beta}{\sqrt{3}} = \varepsilon\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2} = \varepsilon R, \; (\varepsilon = \pm 1).$$

Pe de altă parte:

$$x_1x_2x_3 = -2\alpha(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta) = -q \therefore 2\alpha(\alpha^2+\beta^2) = q.$$

$$(11) \qquad \therefore \alpha^3+3\alpha\left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{q}{2}$$

Scăzând și adunând (10) cu (11), avem:

$$(12) \quad \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right)^3 = -\frac{q}{2}+\varepsilon R, \quad \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}+\alpha\right)^3 = \frac{q}{2}+\varepsilon R$$

sau:

$$(13) \quad \frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\varepsilon R} = u,$$

$$-\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\varepsilon R} = v,$$

Insemnând cu u și v două determinațiuni oarecare ale radicalilor, avem:

$$\alpha = -\frac{1}{2}(u+v), \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v).$$

(*) A se vedea, d. p., cartea lui J. Petersen: „Théorie des équations a gĕbriques" p. 89 — 95.

Rădăcinile ecuației sunt deci:

$$(15)\quad \begin{cases} x_3 = -2\alpha = u+v = \\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\varepsilon\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}+ \\ \qquad \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\varepsilon\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ x_1 = \alpha+i\beta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}u+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}v = r_1 u + r_2 v \\ x_2 = \alpha+i\beta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}u+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}v = r_2 u + r_1 v \end{cases}$$

r_1 și r_2 fiind rădăcinile ecuației: $r^2+r+1=0$.

In acest tablou e destul a lua $\varepsilon = 1$, căci, pentru $\varepsilon = -1$ obținem aceleași valori ale rădăcinilor, într'o ordine diferită.

Discuție. Soluția expusă cuprinde o ambiguitate asupra căreia trebue să insistăm. De fapt, din (12) rezultă nouă sisteme de valori pentru $\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha$ și $-\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha$. prin combinația valorilor:

$$(16)\quad \frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha = u,\ ur_1,\ ur_2\ ;\ -\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha = v,\ vr_1,\ vr_2.$$

Acestea, substituite lui u și v în (15), dau pentru x_1, x_2, x_3, trei sisteme de valori, după cum vom vedea imediat.

Ținând seamă de proprietățile lui r_1 și r_2:

$$r_1 r_2 = 1,\quad r_1^2 = r_2,\quad r_2^2 = r_1,$$

e lesne de văzut că combinațiunile (16) se repartizează în trei categorii:

(I) $\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha,\ -\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha = u,\ v\ ;\ ur_1,\ vr_2\ ;\ ur_2,\ vr_1$

II) $u,\ vr_1\ ;\ ur_1,\ v\ ;\ ur_2,\ vr_2$

(III) $u,\ vr_2\ ;\ ur_1,\ vr_1\ ;\ ur_2,\ v$

care, prin simple substituțiuni în (15), dau pentru x_1, x_2, x_3, (într'o ordine oare care) următoarele trei sisteme de valori:

(*a*) $\quad u+v,\ ur_1+vr_2,\ ur_2+vr_1$

(*b*) $\quad u+vr_1,\ ur_1+v,\ ur_2+vr_2$

(*c*) $\quad u+vr_2,\ ur_1+vr_1,\ ur_2+v.$

Evident, nu toate sunt rădăcini ale ecuației (2).

Pentru a lămuri chestiunea e destul să observăm că ele nu se schimbă dacă înlocuim pe p prin pr_1 sau pr_2. E clar, deci, că tabloul precedent cuprinde rădăcinile ecuațiilor:

$$(A)\ x^3+px+q=0,\quad (B)\ x^3+pr_1x+q=0,$$
$$(C)\ x^3+pr_2x+q=0.$$

Pentru a le separa, ne folosim de expresia:

$$\Sigma x_1 x_2 = x_3(x_1+x_2)+x_1x_2 = \beta^2-3\alpha^2$$

și de relația dedusă din (13):

$$\left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right)\left(-\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right) = -\frac{p}{3},\ -\frac{p}{3}r_1,\ -\frac{p}{3}r_2.$$

1°. Pentru ecuația (A) avem:

$$\beta^2-3\alpha^2 = -\frac{p}{3}\ \therefore\ \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right)\left(-\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right) = -\frac{p}{3}$$

Alegând valorile u și v așa ca să satisfacă relației $uv = -\frac{p}{3}$ rezultă că nu putem lua în (16), pentru cele două paranteze, decât categoria (I) de valori. Ecuația (A) are deci ca rădăcini sistemul (*a*)(*).

2°. Pentru ecuația (B) avem:

$$\beta^2-3\alpha^2 = pr_1\ \therefore\ \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right)\left(-\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right) = -\frac{pr_2}{3}$$

și cum $uv = -\frac{p}{3}$, rezultă că nu putem lua în (16), decât a doua categorie de valori. Așa dar, rădăcinile ecuației (B) sunt (*b*).

3°. In sfârșit, pentru ecuația (C) avem:

$$\beta^2-3\alpha^2 = pr_2\ \therefore\ \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right)\left(-\frac{\beta}{\sqrt{3}}-\alpha\right) = -\frac{pr_2}{3}$$

Și ținând seamă că $uv = -\frac{p}{3}$ rezultă că nu putem considera în (16) decât categoria (III) de valori. Rădăcinile ecuației (C) sunt deci (*c*).

(*) Dacă valorile u și v ar fi fost alese așa încât să avem $uv = -\frac{p}{3}r_1$ sau $-\frac{p}{3}r_2$, pentru paranteze ar fi convenit respectiv categoriile (II) sau (III) și deci ecuația (A) ar fi avut respectiv soluțiile puse sub forma (*b*) sau (*c*).

PROBLEME REZOLVATE

116. — *Să se demonstreze că dacă*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

atunci rapoartele

$$\frac{(AE-BD)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)}{A},$$

$$\frac{(AC-B^2)(DE-BF)-(BE-CD)(DB-AE)}{B}$$

$$\frac{(CD-BE)^2-(B^2-AC)(E^2-CF)}{C},$$

$$\frac{(AE-BD)(DE-BF)-(BE-CD)(D^2-AB)}{D}$$

$$\frac{(CD-BE)(DE-BF)-(BD-AE)(E^2-CF)}{E},$$

$$\frac{(DE-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)}{F}$$

sunt toate egale între ele și egale cu $-\Delta$.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Soluție dată de d-l *Emil Ștefănescu* cl. VI liceul „Spiru-Haret" București.

Vom efectua diferite desvoltări a determinantului Δ având în vedere proprietățile determinanților și vom căpăta la fiecare desvoltare câte un raport, care vor fi astfel toate egale cu $-\Delta$ și deci toate egale între ele.

1°. Pentru primul raport avem:

$$\Delta = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} A & B & D \\ AB & AC & AE \\ AD & AE & AF \end{vmatrix} = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} A & B & D \\ O & AC-B^2 & AE-BD \\ O & AE-BD & AF-D^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(AE-BD)^2-(B^2-AC)(D^2-AF)}{A}$$

2°. Pentru cel de al doilea raport avem:

$$\Delta = \frac{1}{B^2}\begin{vmatrix} AB & B^2 & BD \\ D & C & E \\ BD & BE & BF \end{vmatrix} = \frac{1}{B^2}\begin{vmatrix} O & B^2-AC & BD-AE \\ B & C & E \\ O & BE-CD & BF-ED \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(AC-B^2)(DE-BF)-(BE-CD)(DB-AE)}{B}$$

3°. Pentru cel de al treilea raport avem:

$$\Delta = \frac{1}{C^2}\begin{vmatrix} AC & BC & DC \\ B & C & E \\ CD & CE & CF \end{vmatrix} = \frac{1}{C^2}\begin{vmatrix} AC-B^2 & O & DC-BE \\ B & C & E \\ CD-BE & O & CF-E^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(CD-BE)^2-(B^2-AC)(E^2-CF)}{C}$$

4°. Pentru al patrulea raport avem:

$$\Delta = \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} AD & BD & D^2 \\ BD & CD & ED \\ D & E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} O & BD-AE & D^2-AF \\ O & CD-BE & ED-BF \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(AE-BD)(DE-BF)-(BE-CD)(D^2-AB)}{D}$$

5°. Pentru al cincilea raport avem:

$$\Delta = \frac{1}{E^2}\begin{vmatrix} AE & BE & DE \\ BE & CE & E^2 \\ D & E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{E^2}\begin{vmatrix} AE-BD & O & DF-BF \\ BE-CD & O & E^2-CF \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(CD-BE)(DE-BF)-(BD-AE)(E^2-CF)}{E}$$

6°. Și în fine pentru al șaselea raport avem:

$$\Delta = \frac{1}{F^2}\begin{vmatrix} AF & BF & DF \\ BF & CF & EF \\ D & E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{F^2}\begin{vmatrix} AF-D^2 & BF-DE & O \\ BF-DE & CF-E^2 & O \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(DE-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)}{F}$$

Notă. D-l *Emil Ștefănescu* a mai dat și a doua soluție, mai puțin frumoasă, desvoltând pe $-\Delta$ sub forma

$$AE^2+CD^2+FB^2+ACF-2BDE$$

și arătând, după mici transformări, că fiecare din rapoartele considerate, se reduc la această valoare.

Metoda aceasta, a fost urmată de toți colaboratorii, care au rezolvit această problemă și regretăm, că nu s'au gândit că cele șase rapoarte, odată ce sunt egale cu $-\Delta$, trebuesc să fie șase desvoltări deosebite a unuia și aceluiaș determinant. Soluție aproape de prima, a dat d-l *Mircea Gh. Săvescu* Iași și *Eugeniu I. Scoruțeanu*. Astfel indicăm pe domnii care au trimes a doua soluție:

I. Coșereanu, I. N. Georgescu-Val, Dragomirescu-Buzne Eduard, Pavel I. Dumitrescu, Mircea Bobârnac, Ioan M. Ioniță, Octav Ulmann, Puiu Juster, Mircea Cocorandu, E.

V. Soceanu, Cristea P. Goilav, Andrei Miclescu I. S. Antoniu, E. Iliescu, Bogdan M., Amărăscu O. Gavril, Silion Gh. Ion, Tr. A. Dordea, Ionescu I. Ilie, I. St. Teodorescu, Mihai Stamatiu, Samovici I., Pincu Katz, I. M. Focșeneanu, Const. E. Georgescu, Ernest G. Oprișanu, Ioan B. Ionescu, Tenea N. Ioan, Aurel Sufletel, Măru Dumitru, Mihăescu D. Constantin, I. D. Vasilescu, Propst Jean, Mehlmann Theodor. V. Dan, Cristea Rigani, K. Brucker, Gh. Stancu, Iosif Freifeld, Ion Constantinescu, Gh. Neștianu, Popa I. Teodor, Atanasiu Dumitru, Ciolacu St. Miron, Florian Er. Georgescu, Geanău Ion, Lăzărescu Fl. Ștefan, Stănciulescu A. Gheorghe, Ion Lăzărescu, Bușilă Adrian, Dragomir N. Ion, Georgescu C. Ioan, Florea Negretzu, Alex. Tauber, Virgiliu Ghițescu, Al. I. Stoenescu, Popescu N. Ștefan, Tiberiu Popovici, C. Berdan, Răuț Constantin, Al. Moroianu, D. Hrysanide, Trincă D. Marin și Boneu Ioan, Vincențiu Giotta, Virgil C. Vasilescu, Samoilă Dumitru, Mihail Alexandrescu, Scodreanu Alex. S'au mai primit încă câteva soluții neiscălite.

M. V.

128. — *Să se demonstreze, că într'un triunghiu oarecare, avem relația.*

$$\frac{4}{3}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=r^2\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)4p^2$$

unde m_a, m_b, m_c; h_a, h_b, h_c; p; r *sunt medianele, înălțimile corespunzătoare laturilor a, b, c, semiperimetru și raza cercului înscris.*

EM. I ERCOVICI

D-l *Ion Coșereanu* observă dela început, că prezenta problemă, face obiectul problemei No. 2261 al Gazetei Matematice", anul XX, No. 9, sub o formă puțin schimbată. D-l *Traian A. Dordea* observă că dacă în prezenta relație, să înlocuesc $m_a^2\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$.... se obține relația care face obiectul problemei No. 227 din „Revista de matematicas y fisicas elementales". Restul colaboratorilor în număr de 8 dela școale superioare și universități, 2 din cl. VIII liceală, 26 din cl. VII, 13 din cl, VI, 4 din cl. V și 15 elevi liceali fără indicarea clasei, nu au observat nimica, rezolvind-o fără a se preocupa de felul ei.

Problema fiind rezolvată în G. M., trimitem pe colaboratorii ce nu au rezolvit'o încă să se adreseze acolo.

130. — Să se găsească un număr de trei cifre știind că suma produselor două câte două a cifrelor sale este 17 și că cifra sutelor întrece cu o unitate cifra unităților.

ALEXANDRU TAUBER

1. Soluțiune dată de d-l *Octav Ulmann*, student Școala Politechnică din Timișoara și d-șoara *Anna Wetter* cl. IV lic. „Dragoș-Vodă" Câmpulung-Bucovina.

Vom observa mai întâi că dintre cele 3 cifre una singură va fi cu soț, de oarece numai atuncea vom avea unul din produse și deci suma lor fără soț. Dacă a, b, $a-1$ sunt cele trei cifre a numărului, atunci din

$$ab+a(a-1)+b(a-1)=17$$

să vede că b nu poate fi egal zero și nici a, egal 1, căci 17 este un număr prim. Pentru $a=2$, avem $b=5$ și atunci una din cifre este pară: 2 a sutelor. Nu putem avea deci $a=3$; iar pentru $a=4$, avem $b=\frac{5}{7}$ și mergând mai sus, vom căpăta pentru b tot o fracție mai mică. Deci singura soluție este $a=2$, $b=5$ iar numărul este 251.

2. Soluțiune dată de d-l *Cristea Goilav*, student Tecuci.

Fie abc numărul considerat, când vom avea după enunț:

$$ab+bc+ca=17$$
$$a=c+1$$

de unde, prima ne arată că nici una din cifrele a, b, c nu pot fi mai mare ca 5, căci suma produselor două câte două, chiar când c ar fi egal 1, ar fi mai mare ca 17. Deci $c\leq 4$. Rămâne de văzut când $c=1, 2, 3$ ce devin celelalte cifre. Pentru $c=3$, 2 avem b fracționar și numai pentru $c=1$, avem $b=5$ și dar $a=2$ așa că numărul este 251.

3. Soluție dată de d-l *Andrei Miclescu* Școala Militară de Artilerie Timișoara.

Fie $(a+1)ba$ numărul de aflat. Vom avea

$$(a+1)b+(a+1)a+ab=17.$$

de unde $b=\frac{17-(a^2+a)}{2a+1}$. Vom căuta valorile lui $0\leq a\leq 9$ pentru care b este întreg și mai mic ca 9. Vom avea atuncea:

a	0	1	2	3	4
b	17	5	$\frac{11}{5}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$

Pentru $a > 3$ avem $b < 0$ şi deci neadmisibile. Rămâne dar unica soluţie $a = 1$, $b = 5$ adică 251.

Prin una din aceste metode, au mai rezolvit problema şi următorii d ni: *C. Beşliu, Dragomirescu-Buzne Eduard, Ioan Coşereanu, Nicu Pârâianu, Alexandru Niculescu, Aurel Sufleţel, Ioan M. Ioniţă, Emil Ştefănescu, Amărăscu O. Gavril, Georgescu C. Ioan, Ioan Th. Popovici, Al. Brăileanu, M. H. Brătescu-Râmnic, Virgiliu Ghiţescu, Dragomir N. Ioan, St. Georgescu-Gorjan, Alex. Pamula, Tiberiu Popoviciu, Ionescu I. Ilie, Popa I. Teodor, Măru Dumitru, Nicu P, Arcadian, Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Brătăşeanu A, G., Scodreanu Al., Ion S. Antoniu, Bogdan M., M. Ristea, Constantinescu Ion Atanasiu Dumitru, Buşilă A. Adrian, Negreu P. Petru, Stoenescu Al. I., Florian Er. Georgescu, Filip M. Dobrescu, Neşteanu Gh. Gheorghe, Popovici Puiu, I. Dan, Murariu Petre* (Lugoj), *Răuţ Constantin, Schnfeld H. Conrad, Emil Bercovici, Pincu Katz, Traian A. Dordea, Iordăchescu N. Nistor, Alexandrescu Mihai, Moroianu N. Aurel, Nicuţă St. Teodoru, Gogălniceanu M. Mihail, I. M. Focşăneanu, Vasile Dan, Samovici Isidor, Const. Berdan, M. Cocorandu* Braşov, *Tenea N. Ioan, Cristea Rigani, I. Boneu, Isaiia Nicolescu, Lăzărescu Fl. Ştefan, Florea Negretzu, I. N. Georgescu-Val, Vincenţiu Giotta, Marinescu N. Ioan.*

Din cl. V, au rezolvit problema asemenea bine, d-nii: *Titus Pârvulescu, Ovidiu Gh. Popea* Chişinău. *Ionescu T. Carol, Gabrielescu Vasile, Dumitrescu G. Marin, Solomon Wilhelm, Leon Weiss, Virgil Atanasiu şi Maximilian Grünfeld.*

D-l *I. N. Georgescu-Val*, în aceleaşi condiţii, găseşte numerile de 4 cifre: 1312, 5201 şi numerile de 5 cifre următoare: 31201, 30211, 13201, 10231, 10180, 18100, 80110, 81100.

D-l *Traian A. Dordea* schiţează o generalizare a problemei de faţă. D-l *Florian Er. Georgescu* arată că soluţia problemei de faţă se găseşte printre soluţiile problemei următoare: „Să se găsească un număr de 3 cifre distincte, ştiind că suma patratelor cifrelor, minus cifra zecilor este egală cu patratul cifrei zecilor" dând ca rezultat numerile: 121, 251, 152, 282. D-l *Tiberiu Popovici* îşi propune a găsi în general toate numerile de trei cifre, în care suma produselor două câte două să fie un număr prim iar cifra sutelor să întreacă cu o unitate cifra unităţilor şi indică soluţiile: 201, 211, 231, 251, 271, 291, 312, 352, 372, 413, 453, 473, 514, 534, 574, 594, 615, 675, 756, 817, 837. 857, 897, 918, 938, 958, 978. D-l *St. Georgescu-Gorjan* remarcă, că dacă n'ar fi fost condiţia a doua, problema ar avea soluţiile: 118, 181, 811, 125, 152, 215, 251, 512, 521. D-l *Boju Roseţel* rezolvă problema prin considerarea formării numerilor de trei cifre în o anumită ordine şi din care scoate că numai numărul 251 să bucură de proprietatea enunţată. D-l *Răuţ Constantin* dă o soluţie algebrică şi o lungă soluţie aritmetică prin o analiză completă. D-l *Iulian M. Nicolau* şi *I. St. Teodorescu* plecând greşit, că cifra zecilor ar fi mai mare cu o unitate ca cifra unităţilor, deşi enunţul îl scriu exact, ajung la soluţia 521 care în adevăr satisface cazul ce l'au considerat.

M. V.

RECREAŢIUNI MATEMATICE

Orice număr ridicat la o putere pară este egal cu unitatea.

Fie N un număr oarecare:

Să considerăm identitatea evidentă.

$a^2 = (-a)^2$; a fiind întreg.

$$\therefore \log_N a = \log_N (-a) \quad \text{sau:} \quad N^a = N^{-a} = \frac{1}{N^a}$$

$$\therefore N^{2a} = 1 \qquad \text{C. E. D.}$$

Obs. Putem lua şi fracţionar şi atunci putem enunţa: un număr ridicat la orice putere este egal cu unitatea.

DILI C. SCHILERU
Sărdăneşti-Gorj

Asupra unui joc cu numere.

In No. 2, vol. I, al acestei reviste, d-l I. Ionescu arată legăturile aritmetice, care sunt la baza câtorva jocuri cu numere. Acelaş lucru îl voi face şi eu în cele ce urmează.

Propunem unei persoane să-şi aleagă un număr după cadranul unui ceas. Dupăce şi l'a ales, noi vom ciocăni cu un creion pe diferite numere, în timp ce persoana căreia i-am propus jocul, după fiecare ciocănitură a noastră va număra, în gând, înainte dela numărul care şi l'a ales. Când persoana va ajunge de ex. la numărul 20, noi trebue să fim cu vârful creionului pe numărul care şi l'a ales.

Presupunând că numărul ales este 12, pânăce persoana trebue să ajungă la 20, mai trebuesc încă 8 lovituri, 7 indiferente şi a opta pe 12.

Presupunând că şi-a ales 11, mai avem 9 lovituri. Primele 7, le vom face diferite, a opta pe

12 şi a noua pe 11. De aici rezultă următoarea regulă:

Din numărul, la care am spus că trebue să ajungem cu creionul pe numărul ales, scădem 12. Restul care rămâne — 1, ne indică numărul loviturilor diferite, care trebue să le facem, cea următoare pe 12 şi pe urmă consecutiv pe 11, 10, 9 etc.

PINCU KATZ
clasa VIII Galaţi

NOTE MATEMATICE

Asupra problemei 2755 din Gazeta Matematică: In numărul din Octombrie 1922, a fost rezolvată problema următoare:

Unghiurile unui triunghiu pot fi ele măsurate prin arc sin α, arc cos α, arctg α?

Această problemă propusă de d-l I. Ionescu este interesantă fiindcă conduce la o ecuaţie algebrică ireductibilă de ordin superior ordinului al doilea, şi prin urmare defineşte un triunghiu remarcabil. In aceste condiţiuni, este util a cerceta dacă nu cumva iraţionalitatea algebrică introdusă de soluţiunea particulară dată, nu e în mod artificial mărită sau, mai precis, dacă ea nu s'ar putea reduce la una de un ordin mai mic.

Consideraţiuni simple îndrituesc această presupunere şi în adevăr iată o altă soluţiune a problemei, care conduce la o ecuaţie ireductibilă de ordinul al treilea şi nu de ordinul al şeaselea (G. M. pag. 60, anul 28):

Din relaţiunile: $\sin A = \cos B = \operatorname{tg} C = \alpha$ deducem neapărat că $A > 90$. Prin urmare, având în vedere prima egalitate obţinem:

$$180^0 - A + B = 90^0$$

de unde $$A = 90^0 + B.$$

Egalitatea: $$\operatorname{tg} C = \cos B$$

devine atunci:

$$\cos B = -\operatorname{tg}(A + B) = -\operatorname{tg}(90^0 + 2B) = \cot 2B$$

de unde:

$$2 \sin B \cos^2 B = \cos^2 B - \sin^2 B = 1 + 2 \sin^2 B$$

sau: $$1 - 2 \sin^2 B = 2 \sin B (1 - \sin^2 B)$$

Ecuaţia problemei este deci, punând $\sin B = \beta$:

$$2\beta^3 - 2\beta^2 - 2\beta + 1 = 0$$

care este o ecuaţie de gradul al treilea, având o singură rădăcină positivă cuprinsă între 0 şi 1, egală cu: 0.403..., de unde

$$B = 23^0,\ 46',\ 4'',\ 21$$

valoarea calculată la locul citat din Gazeta Matematică.

TRAIAN LALESCU

Asupra problemei No. 13.

Am publicat această problemă precum şi o alta analoagă în Revista de Matematicas (Ano III. No. 12, pag. 250, problema No. 248) din Buenos Aires. numeroase soluţiuni s'au dat dintre cari unele de o eleganţă deosebită, nici una din soluţiuni (şi notele matematice publicate în R. M. T.) nu au întrebuinţat metoda generală a însumărei seriei şi deducerilor diferitelor variante.

Dacă în seria dată:

$$1 + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} + \ldots + \frac{n}{a^{n-1}} + \ldots \qquad a > 1$$

facem substituţia $\frac{1}{a} = x$ $(x < 1)$ obţinem:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + x x^{n-1} + \ldots$$

care nu este altceva decât prima derivată a *seriei tip*:

$$S_1 = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

Derivând odată şi înlocuind $x = \frac{1}{a}$ obţinem seria din problema No. 13.

Derivând de două ori şi înlocuind $x = \frac{1}{a}$ obţinem seria găsită de d-l Rizescu în una din notele matematice ulterioare.

Inlocuind pe $x = \frac{1}{a^{n+1}}$ şi înmulţind cu $\frac{1}{a}$, obţinem seria generalizată în R. M. y F. E. (pag. 252).

Asemenea prin alte înlocuiri se obţine seria d-lui I. Al. Stoenescu din R. M. T. în una din note relativ la problema No. 13.

LT. I. LINTES

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICA DIN TIMIŞOARA

6, 7 şi 8 Octombrie

GEOMETRIE (examenul oral)

(Urmare)

41. Medianele unui triunghiu sunt concurente.

42. Printr'un punct P se duc 2 coarde perpendiculare care taie un cerc O în punctele A, B şi C, D. Să se arate că

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=4R^2.$$

43. Dacă P din problema precedentă e fix atunci suma $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$ este constant.

44. Să se găsească locul centrelor cercurilor care trec prin un punct P şi taie un cerc dat după un diametru.

45. Unui cerc dat să i se ducă o coardă de lungime dată trecând prin un punct fix.

46. Cazurile de asemănarea triunghiurilor.

47. Să se arate că într'un triunghiu picioarele înălţimilor şi picioarele medianelor sunt pe aceiaşi cerc.

48. Fie O şi H centrul cercului circumscris şi punctul de întâlnire al înălţimilor unui triunghiu A B C iar M mijlocul laturei B C. Să se arate că A H este dublul lui O M.

49. Să se construiască un triunghiu cunoscând punctele A, O, H din problema precedentă.

50. Dacă p şi q sunt segmentele determinate de piciorul bisectoarei unghiului drept pe ipotenuza unui triunghiu dreptunghic atunci înălţimea acestui triunghiu este dată de

$$\frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}.$$

51. Pe diametrul B C al unui cerc se ia punctul A aşa că C A să fie egal cu raza. Fie M un punct luat pe tangenta în C şi M D tangenta dusă din M la cerc. Să se arate că unghiul D M A este triplul unghiului C M A.

52. Pe muchile unui triedru tridreptunghic în O se iau lungimile $OA=a$, $OB=2b$, $OC=3a$. Să se arate că volumul piramidei O A B C este egal cu al cubului de latură a.

53. Să se calculeze suprafaţa totală a piramidei OABC din problmea precedentă.

54. Laturile opuse ale unui patrulater inscriptibil se întâlnesc în M şi N. Să se arate că dacă M T şi N T' sunt tangentele la cercul circumscris, avem

$$\overline{MN}^2=\overline{MT}^2+\overline{NT'}^2.$$

55. Două cercuri se taie după o coardă A B. Să se arate că tangentele duse la cele 2 cercuri dint'un punct de pe A B sunt egale.

56. Se consideră toate cercurile de rază R care trec printr'un punct A. Se cere locul punctelor de tangenţă ale tangentelor paralele cu o direcţie dată.

57. Prin un punct dat să se ducă o dreaptă care să treacă prin intersecţia inaccesibilă a 2 drepte.

58. Pe un semicerc să se găsească un punct C ştiind că tangenta în C întâlneşte diametrul fix A B într'un punct D aşa că A C = C D.

59. Fie B O C un triunghiu echilateral. Cercul de centru O şi raza O C taie pe O B în A iar tangenta în C la acest cerc taie tot pe O B în D. Să se arate că A C = C D.

60. Fie D şi E picioarele bisectoarelor unghiului A într'un triunghiu A B C. Să se arate că rapoartele $\frac{DB}{DC}$ $\frac{EB}{EC}$ sunt egale.

61. Fie I centrul cercului înscris într'un triunghiu ABC şi A D bisectoarea lui A. Să se arate că $\frac{AD}{AI}=\frac{2p}{b+c}$

63. Fie E proecţia lui D din problema precedentă pe A C. Să se arate că $DE=\frac{bc}{b+c}$

63. Fie $XOY=120^0$ şi O Z bisectoarea acestui unghiu. O transversală taie pe O X, O Y, O Z în A, B, C. Să se arate că

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{OC}$$

64. Într'un triunghiu isoscel depărtările unui punct de pe bază la laturile egale au o sumă constantă.

65. Pe latura O Y a unui unghiu drept X O Y se află 2 puncte fixe A şi B. Să se găsească pe O X un punct M astfel că unghiul A M B să fie maximum.

66. Mediana A M a unui triunghiu A B C întâlneşte cercul circumscris acestui triunghiu într'un punct D. Dacă G este intersecţia medianelor atunci avem

$$9GA\,.\,GD=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

67. Să se arate că dintr'un punct nu se poate duce de cât o perpendiculară la o dreaptă.

68. Să se afle suprafaţa unui trapez.

69. Se dau 2 drepte D, D' şi un punct M. Să se construiască o dreaptă P P' perpendiculară pe D, D' aşa că unghiul P M P' să aibă o valoare dată.

70. Să se afle volumul unui trunchiu de piramidă.

71. Să se construiască un triunghiu A B C cunoscând unghiul A, bisectoarea acestui unghiu ştiind că ea determină pe B C două segmente din care unul egal cu ea.

72. Să se afle volumul sferei.

73. Se consideră un cerc de rază R şi 2 tangente perpendiculare A C, B C. Să se calculeze raza unui alt cerc tangent la cercul dat şi la cele 2 drepte.

74. Fie A B un diametru al unui cerc O. Se uneşte A cu un punct C de pe cerc şi se ia pe A C un punct D aşa că C D = A C. Fie M intersecţia lui O D cu B C. Se cere locul lui M.

75. Într'un tetraedru S A B C, baza A B C şi faţa SBC sunt triunghiuri echilaterale de latura a şi fac între ele un diedru de 60^0. Se cere suprafaţa totală a tetraedrului.

76. Să se calculeze suma patratelor a 2 laturi într'un triunghiu.

77. Idem diferența patratelor a 2 laturi.

78. Prin un punct P luat în interiorul unui cerc se duc 2 secante rectangulare P A B și P A′ B′. Se cere locul mijloacelor laturilor patrulaterului A B A′ B′.

79. In problema precedentă să se găsească locul proecțiilor lui P pe laturile patrulaterului A B A′ B′.

80. Fie X O Y un unghiu de 60° și Z O Z′ bisectoarea lui exterioară. Să se demonstreze că dacă P A, P B, P C sunt depărtările unui punct P la O X, O Y, O Z atunci P A = P B + P C.

81. Două cercuri O, O′ se taie în punctele A și B. Fie B′ intersecția lui O A′ cu cercul O′ și C intersecția lui O′ A cu cercul O. Să se arate că centrul cercului circumscris triunghiului C A B′ se află pe A B.

82. Se dau 2 paralele X X′ și Y Y′ și 2 puncte A și B. Să se ducă o linie A C D B care să aibă punctele C și D respectiv pe X X′, Y Y′ și așa ca C D să fie paralelă cu o direcție dată iar A C B D să aibă o lungime minimă.

83. Două cercuri O și O′ sunt tangente într'un punct P. Fie 3 R raza cercului O și R raza cercului O′ iar A A′ tangenta lor comună. Să se arate că $\widehat{A\,O\,O'} = 60^0$.

84. Fie M A și M A′ două tangente duse la un cerc. O secantă ce trece prin M taie cercul în P și Q. Să se arate că

$$P A \cdot Q A' = P A' \cdot Q A.$$

85. Fie A H înălțimea unui triunghiu dreptunghic A B C, r, r', r'' razele cercurilor înscrise în triunghiurile A B C, B H A, C H A. Să se arate că $r^2 = r'^2 + r''^2$.

86. Să se găsească locul punctelor pentru care diferența patratelor tangentelor duse la 2 cercuri fixe, este constantă.

87. Locul punctelor M pentru care suma patratelor distanțelor la 2 puncte fixe este constantă.

88. Locul punctelor M pentru care diferența patratelor distanțelor la 2 puncte fixe este constantă.

89. Să se arate că punctele de pe bisectoarele unui unghiu sunt egal depărtate de laturile unghiului.

90. Catetele unui unghiu drept rămân mereu tangente la 2 cercuri fixe. Să se arate că bisectoarele ungiului drept rămân și ele tangente la 2 cercuri fixe.

91. Să se calculeze raza sferei înscrisă într'un con de înălțimea h și de bază πR^2.

92. Intr'un patrulater A B C D se dă

$$A B = B C = 6;\ C D = 7;\ \widehat{B} = 90^0;\ \widehat{C} = 135^0$$

și se cere valoarea lui A D.

93. Prin vârful O al unui unghiu fix X O Y se duce o circonferință care taie laturile unghiului în A și B. Se cer locurile extremităților diametrelor paralele cu A B.

94. Se dă un triunghiu A B C înscris într'un cerc O′ Prin A se duc 2 drepte care tae cercul A B C în P, P și așa că

$$\widehat{B\,A\,P} = P'\,A\,C$$

Dreptele A P, A P′ taie pe B C în M și M′. Să se arate că

$$A M' \cdot A P = A M \cdot A P' = A B \cdot A C.$$

95. Să se demonstreze că dacă un patrulater înscris într'un cerc are diagonalele egale, acest patrulater este un trapez isoscel.

96. Se dau 2 puncte A, B și o dreaptă X Y. Să se găsească pe X Y un punct M așa că suma A M + M B să fie minimă.

97. Prin 2 puncte date să se descrie un cerc tangent la o dreaptă dată.

98. Fie un cerc de diametru A B și P intersecția a 2 coarde A D, B C. Să se arate că

$$\overline{AB}^2 = A D \cdot A P + B C \cdot B P.$$

99. Să se construiască un cerc care să taie după niște diametri 3 cercuri date.

100. Fie A B C D un paralelogram. Să descrie un cerc care trece prin A și taie pe A B, A D și A C respectiv în F, H, G. Să se arate că avem

$$A B \cdot A F + A D \cdot A H = A C \cdot A G.$$

SOLUTIUNILE CHESTIUNILOR DE GEOMETRIE
date la proba scrisă

La proba scrisă la geometrie din ziua de 5 Octombrie 1922 sau dat 4 chestiuni din care două obligatoare și 2 facultative. Enunțul acestor chestiuni a fost publicat în *Revista Matematică* No. 8 la pagina 124.

La proba scrisă nici un candidat nu a atacat chestiunea a 4, iar chestiunea a 3 n'a fost complect rezolvată decât de 5 candidați.

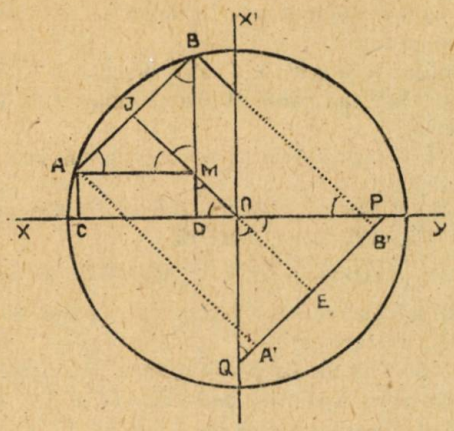
Dau în cele ce urmează soluțiile complecte ale tuturor celor 4 chestiuni.

Chestiunea I. Fie X Y *un diametru fix al unui cerc de rază 1. Se cere: 1) Să se ducă o coardă* A B *de lungime 1 și care să facă cu* X Y *un unghiu de 45°. 2) Să se calculeze lungimile* A C, C D *și* B D *știind că* C *și* D *sunt proecțiile lui* C *și* B *pe* X Y. *3) Când figura se rotește în jurul lui* X Y *să se calculeze suprafața zonei născută de arcul* A B, *suprafața laterală a trunchiului de con născut de trapezul* A B C D *și volumul acestui trucnhiu de con. In calcule nu se vor efectua extragerile de rădăcini când se va întâlni* $\sqrt{2}$ *și* $\sqrt{3}$.

1) Fie O X′ perpendiculara pe X Y în O. Se ia pe O X și O X′ lungimile O Q, O P egale între ele. Evident că P Q face 45° cu X Y. De-o parte și de alta a mijlocului E a lui P Q se iau lungimile E B′, E A′ egale între ele și egale cu $^1/_2$. Paralelele duse din A′ și B′ la O E întâlnesc cercul în A și B. Coarda A B fiind egală și paralelă cu A′ B′ este coarda cerută.

2) Fie M intersecția lui B D cu paralela dusă din A la C D și I mijlocul lui A B. Triunghiul A M B dreptunghic în M este evident și isoscel căci A B face 45° cu A M. Deci A M = M B și I M trece prin O. Triunghiu A M B dă

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 = 1.$$



de unde $2\overline{AM}^2 = 2\overline{CD}^2 = 1.$

sau $$CD = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

apoi $$AC = MD = \frac{MO}{\sqrt{2}} = \frac{OI - IM}{\sqrt{2}}$$

dar OI fiind înălțimea triunghiului echilateral OAB, este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ iar $IM = IA = \frac{1}{2}$, așa că

$$AC = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$

3) Suprafața zonei AB este dată de

$$S = 2\pi \cdot CD = 2\pi \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}$$

Suprafața laterală a trunchiului de con $ACDB$ este

$$S' = \pi (AC + BD) AB = \frac{\pi\sqrt{6}}{2}$$

Volumul acestui trunchiu de con este

$$V = \frac{1}{3}\pi CD (\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + AC \cdot BD) = \frac{5\pi\sqrt{6}}{24}$$

Chestiunea II. Prin un punct I, *luat pe diagonala* AC *a unui paralelogram* $ABCD$, *se duc paralele la laturile paralelogramului, care-l împart în 4 paralelograme. Să se demonstreze: 1) Că cele 2 paralelograme, care au punctele* B *și* D *ca vârfuri opuse, au suprafețele egale. 2) Că dreapta care unește centrele acestor 2 paralelograme are o direcție și o lungime constantă. 3) Că proprietățile precedente sunt adevărate și când punctul* I *este pe prelungirea lui* AC.

1. Proprietatea se demonstrează pe figură. Avem evident

$$AIF = AIE \text{ și } CIH = CIG.$$

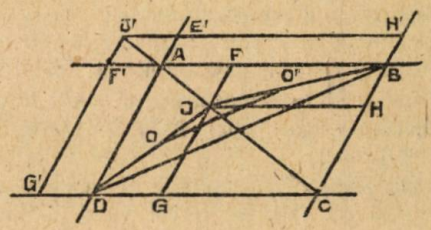
Adunând aceste egalități membru către membru și scăzând rezultatul din egalitatea evidentă

$$ABC = ADC$$

se obține $DEIG = BFIH$.

2) Fie O și O' centrele paralelogramelor $DEIG$ și $BFIH$. Linia OO' unind mijloacele laturilor OD, OB ale triunghiului DBI este evident paralelă și egală cu jumătatea dreptei fixe BD.

3) Avem pe figură



$$I'AE' = I'AF' \text{ și } ABC = ACD,$$

Adunând și scăzând din $I'CH' = I'CG'$ rămâne $AE'H'B$ și $ADG'F'$.

Proprietatea a doua rezultă imediat căci centrele paralelogramelor $AE'H'B$ și $ADG'F'$ unesc mijloacele laturilor AH' și AG' din triunghiul DAB.

Chestiunea III. Pe bisectoarea unghiului A *a unui triunghiu* ABC *se iau punctele* P *și* Q *așa că*

$$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = AB \cdot AC$$

Să se arate că patrulaterul $BPCQ$ *este inscriptibil și că unghiurile* APB, MPC *sunt egale,* M *fiind mijlocul lui* BC.

Din relația dată se deduce

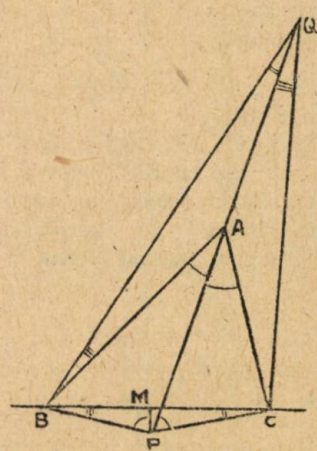
$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AC}{AQ}$$

ceiace arată că triunghiurile AQB, ABQ sunt asemeni, căci ele au 2 laturi proporționale și unghiurile BAQ, CAQ cuprinse între ele egale, ca suplimente ale unghiurilor egale BAD și CAD. Prin urmare

$$\widehat{BQA} = \widehat{ACQ}$$

așa că putem scrie

$$(1)\quad \widehat{BQC} = \widehat{BQA} + \widehat{AQC} = \widehat{ACQ} + \widehat{AQC} = \widehat{PAC} = \frac{A}{2}$$



Se arată la fel că triunghiurile A B P, A P C sunt asemeni, deci

$$(2)\quad \widehat{BPC}=\widehat{BPA}+\widehat{APC}=\widehat{BPA}+\widehat{ABP}=180^0-\frac{A}{2}$$

Adunând (1) cu (2) găsin

$$\widehat{BAC}+\widehat{BPC}=180^0$$

deci patrulaterul B P C A este inscriptibil. De aci rezultă relațiunile

$$\widehat{PCB}=\widehat{PQB}\quad \text{și}\quad \widehat{PQC}=\widehat{QBA}$$

care arată că triunghiurile P B C, A Q B sunt asemeni și că deci

$$\frac{BC}{PC}=\frac{BQ}{QA}$$

cum însă $BC=2CM$ urmează că

$$\frac{CM}{PC}=\frac{BQ}{2QA}=\frac{BQ}{QP}$$

deci triunghiurile M P C, B P Q având unghiurile P C M și B Q P egale și laturile adiacente proporționale sunt asemeni, ceiace arată că

$$\widehat{QPB}=\widehat{MPC}\quad \text{și}\quad \widehat{PMC}=\widehat{PBQ}$$

Chestiunea IV. Se consideră 2 puncte A, B *și toate grupurile de câte 2 cercuri* O, O_1 *care trec prin* A *și* B *și care fac între ele un unghiu dat* α. *Fie* T T′ *o tangentă comună la* O, O_1 *și* a, b *proecțiile lui* A *și* B *pe* T T′. *Se cere: 1) Să se găsească locul geometric al punctelor* T *și* T′ *când razele celor 2 cercuri variază. 2) Să se demonstreze că produsul* $Aa\times Bb$ *este constant. 3) Să se arate că dacă* φ *este unghiul pe care-l face* T T′ *cu* OO_1 *atunci avem*

$$\cos^2\varphi=\frac{2RR_1}{\overline{OO_1}^2}(1-\cos\alpha)$$

unde R *și* R_1 *sunt razele cercurilor* O *și* O_1.

Fie M intersecția lui TT_1 cu A B. Se știe că M este mijlocul lui TT_1. Fie încă N intersecția lui OO_1 cu A B și L proiecția lui O_1 O T.

Din triunghiul OAO_1 în care $\widehat{OAO_1}=\alpha$, avem

$$(1)\quad \overline{OO_1}^2=R^2+R_1^2-2RR_1\cos\alpha$$

$$(2)\quad OO_1\,.\,AN=RR_1\sin\alpha.$$

Din triunghiurile dreptunghice AaM, BbM se scoate

$$Aa=MA\cos\varphi\quad \text{și}\quad Bb=MB\cos\varphi$$

care prin înmulțire dau

$$(3)\quad Aa\,.\,Bb=MA\,.\,MB\cos^2\varphi=\overline{MT}^2\cos^2\varphi=\left(\frac{TT'}{2}\cos\varphi\right)^2$$

Pe figură se vede că

$$TT'=O_1L=OO_1\cos\varphi$$

de unde se deduce prin înmulțire cu $\frac{1}{2}\cos\varphi$

$$(4)\quad \frac{TT'}{2}\cos\varphi=\frac{OO_1}{2}\cos^2\varphi$$

Apoi avem

$$OL=R-R_1=OO_1\sin\varphi$$

de unde

$$(5)\quad \sin\varphi=\frac{R-R_1}{OO_1}$$

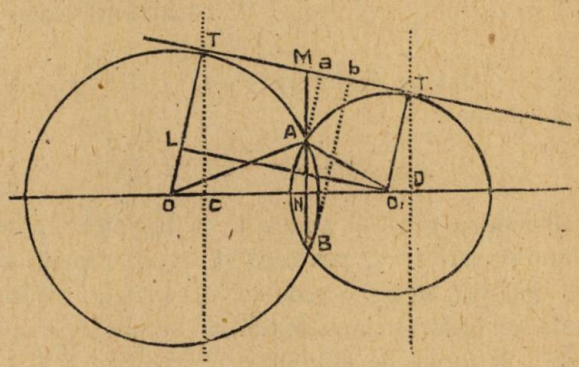
și deci

$$\cos^2\varphi=1-\frac{(R-R_1)^2}{\overline{OO_1}^2}=\frac{\overline{OO_1}^2-(R-R_1)^2}{\overline{OO_1}^2}$$

sau ținând seama de (1) găsim

$$(6)\quad \cos^2\varphi=\frac{2RR_1}{\overline{OO_1}^2}(1-\cos\alpha)$$

care demonstrează punctul (3) al problemei.



Relațiunea (6) se mai poate scrie

$$OO_1\,.\,\cos^2\varphi=\frac{2RR_1}{OO_1}(1-\cos\alpha)$$

sau înlocuind în membrul al doilea pe OO_1 prin valoarea dedusă din (2) și făcând simplificările găsim

$$(7)\quad OO_1\cos^2\varphi=\frac{2AN}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha)=2AN\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

Comparând (7) cu (4) avem

$$\frac{TT'}{2}\cos\varphi=AN\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\text{constant.}$$

Prin urmare trecând la (3)

$$Aa\,.\,Bb=\overline{AN}^2\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}=\text{constant}$$

ceiace demonstrează punctul (2).

Fie C și D proecțiile lui T și T′ pe OO_1. Avem

$$NC=MT\cos\varphi=\frac{TT'}{2}\cos\varphi=\text{constant}$$

deci T se mișcă pe perpendiculara în C la OO_1. La fel se arată că T_1 se mișcă pe perpendiculara ridicată în D pe OO_1.

PROBLEME PROPUSE

186. — I. Să se calculeze expresiunile;

$E_1 = \log\ 469421468$, $E_2 = \log.\ \log.\ \log.\ 1921.$

II. Să se calculeze logaritmul lui 5 în sistemul cu bază 7.

III. Care este baza unui sistem de logaritmi, știind că 3 este logaritmul lui 5?

LT. I. LINTES

187. — Să se verifice identitatea:

$$(a-x)^n + x(a-x)^{n-1} + a\,x(a-x)^{n-2} + a^2\,x(a-x)^{n-3} + \ldots + a^{n-1}\,x = a^n$$

I. DUMITRIU-ARAD

188. — Între ce limite trebuie să varieze y, pentruca ecuația

$$x^2 - 4\,x\,y + y^2 + 3\,x - 10\,y + 1 = 0$$

să aibă două rădăcini pentrn x, și între ce limite trebue să varieze x, pentruca să avem pentru y, două valori? Să se determine în ambele cazuri, natura semnelor rădăcinelor și să se pună rezultatele sub formă de tablouri.

M. VASILIU

189. — Care este relația de condiție, pentruca ecuația:

$$x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0.$$

să aibă $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$ și să se rezolve în acest caz $x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 2 = 0$.

MEHLMANN THEODOR

190. — Să se demonstreze că dreptele lui Simson ale punctelor de pe cercul circumscris, simetrice vârfurilor față de mediatoarele triunghiului, sunt paralele cu diametrele acelor vârfuri.

TR. LALESCU.

191. — Să se găsească adevărata valoare a funcțiunei și a primelor derivate a lui $y = x^3 \operatorname{ctg} x$.

A. TH. NICOLAU

192. — Să se arate că în orice triunghiu, există relațiunea:

$$\frac{p^2}{r} = \frac{(p-a)^2}{r_a} + \frac{(p-b)^2}{r_b} + \frac{(p-c)^2}{r_c} + 12\,R$$

notațiunile fiind cele cunoscute.

LOCOT. GRIGORE ZAPAN.

193. — Se dă un cerc O și o coardă AD. Să se ducă prin punctul D o coardă DC, care să întâlnească diametrul punctului A în B și cercul O în C, astfel că triunghiul A B C să fie isoscel (A B = A C).

CORNLIU SANDULESCU

194. — Un tun asvârle un proectil de 6 kg., cu viteza inițială de 500 m. pe secundă. Să se afle puterea în cai putere dacă lungimea țevii este 1.20 m. și admitem că viteza variază liniar, dela zero la viteza inițială.

C. C. TEODORESCU

295. — Se scufundă la fundul unui bazin cu apă (densitatea 1), o mică sferă de lemn de densitatea 0,4, dându-i-se drumul fără viteză inițială. Distanța dela fundul bazinului la suprafața liberă a apei fiind de 10 m., să se determine:

1°. — Accelerația mișcărei, știind că accelerația locului pentru un corp în cădere liberă este de 980 cm.

2° — Viteza când sfera ajunge la suprafață și timpul întrebuințat dela fund la suprafață.

3°. — La ce înălțime ar sări sfera în aer, dacă am neglija adeziunea și rezistența aerului.

4°. După stabilirea echilibrului, care este raportul între partea cufundată în apă și cea din aer,

5°. — Greutatea ce ar trebui adăugată sferii, ca să se cufunde complet în lichid.

C. STANCESCU.

INFORMATIUNI

D-l Inginer *M. Vasiliu*, care dela înființarea Revistei Matematice din Timișoara a fost ales ca cel mai indicat pentru a conduce redacțiunea, a plecat dintre noi mutându-se cu serviciul la București.

Comitetul de Redacție regretă perderea acestui colaborator prețios care nu a măsurat cu sgârcenie munca ce o depunea pentru revistă. Dar în special corespondenții noștri, pot afla acuma cu câtă bună voință examina el toate soluțiunile, căutând din noianul de răspunsuri care veneau, să găsească pe acei cărora o încurajare le-ar fi adus un imbold la muncă. Cu mare răbdare cerceta toate răspunsurile, și punea cea mai mare scrupulozitate în aranjarea și catalogarea lor, pentru a nu uita pe nimeni și pentruca fiecare să vadă că rândurile lui au fost citite, judecate și apreciate. Adeseori dădea diferitele soluții sau metode întrebuințate pentru rezolvarea unei probleme, pentru ca fiecare să poată face comparația în ele, și să poată alege calea cea mai bună. Notițele și însemnările ce urmau după unele probleme notate în un colț cu M. V. reprezentau seri întregi petrecute cu citirea soluțiilor trimise din toate unghiurile țării.

D-l M. Vasiliu a fost repetitor de cursuri la Școala Politechnică din Timișoara, și a făcut cursul de Geometrie cu studenții anului pre-gătitor. Aflăm că cu ocazia mutării la București a fost recomandat ca asistent al d-lui Prof. Lalescu, la Școala Politechnică din București pentru cursul de Geometrie analitică.

In locul d-lui M. Vasiliu, redacțiunea va fi condusă de d-l *Valeriu Alaci*, profesor la Școala Politechnică din Timișoara, căruia i se va trtmite soluțiile problemelor propuse în revistă.

Școala Politechnică din Timișoara are actualmente 385 studenți, repartizați în modul următor:

Anul III,	66
Anul II,	82
Anul I,	91
Anul pregătitor	146
	385

Repartizați pe provincii ar fi astfel.

	preg.	I	II	III	Total
Regat	11	48	41	29	129
Ardeal	45	16	14	15	90
Banat	18	6	13	10	47
Bucovina	9	5	3	4	21
Basarabia	63	16	11	8	98
	146	91	82	66	385

In afară de aceasta au mai cerut transferarea 47 studenți dela diferite școli politechnice și universități străine, care conform legii sunt matriculați pe baza unui examen de diferență fixat de direcțiune. Astfel avem înscriși în anul prim, al doilea și al treilea.

	I	II	III
Școala Politechnică București	3	1	—
Institutul Electrotechnic București	—	3	7
Institutul Electrotechnic Iași	—	8	—
Școala Politech. Charlottenburg	—	—	1
Școala Politech. Brünn	1	6	—
Școala Politech. Praga (cehă)	—	6	—
Școala Politech. Praga (germ.)	—	1	—
Școala Politech. Torino	—	5	—
Școala Politech. Budapesta	—	2	—
Universitatea Liège	—	1	—
Academia mine Psibram	—	1	—
Institutul Polit. Harcov	—	1	—
	4	35	8

In ziua de 29 Octombrie, ora 11 dimineața a avut loc deschiderea cursurilor Școalei Politechnice. Cu această ocazie s'a pus și piatra fundamentală la noul pavilion al școlii a cărui clădire s'a început.

Serbarea a fost onorată cu prezența d-lui Ministru al lucrărilor publice d-l *d-r A. Cosma*. La locul clădirii s'a efectuat o slujbă religioasă și s'a citit actul comemorativ scris pe un pergament care pe urmă a fost închis în o cutie și zidit în peretele clădirii.

La serbare a luat parte un public numeros și toți studenții școlii.

Au rostit cuvântări d. *V. Vâlcovici*, directorul școlii, d-r *Iuliu Coste*, prefectul județului, *Dr. D. Nistor*, prim notar în numele comunei Timișoara și d-l *Dr. A. Cosma* ministrul lucrărilor publice.

La ora 1 p. m. a avut loc un banchet dat la otel Ferdinand.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMISOARA.

ANUL II. 15 DECEMBRIE 1922 NO. 10

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENULUI 30 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. TR LALESCU DREAPTA LUI SIMSON
2. NOTE MATEMATICE.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. CHESTIUNI DE EXAMEN
6. PROBLEME REZOLVATE.
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1922

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Şcoalei Politecnice din Timişoara.

ANUL II. — NO. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1922

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

DREAPTA LUI SIMSON

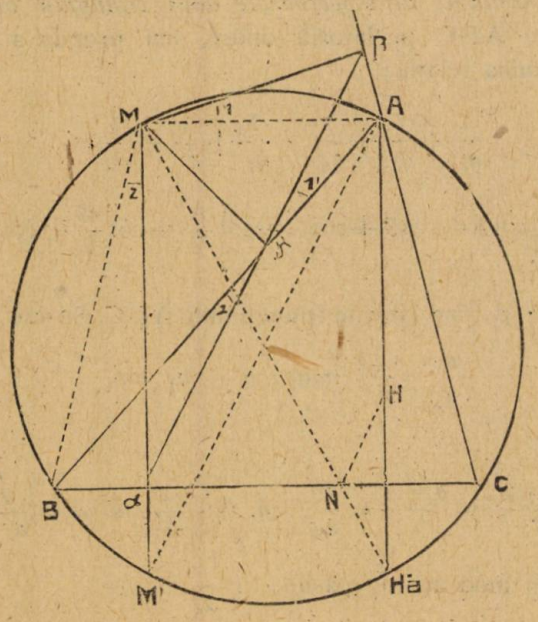
TR. LALESCU

Dreapta lui Simson joacă un rol important în problemele de Geometria Triunghiului. Proprietăţile sale interesante nu se găsesc expuse sistematic în nici un tratat de Geometrie; de aceia socotesc că va interesa pe cititorii „Revistei Matematice din Timişoara" o expunere elementară a proprietăţilor geometrice în legătură cu această dreaptă.

Teorema lui Simson constă în următoarea proprietate:

Proecţiile pe laturile unui triunghiu ale unui punct de pe cercul său circumscris, sunt în linie dreaptă.

Fie α, β, γ proecţiunile punctului M pe laturile triunghiului ABC (v. fig.).



In patrulaterele inscriptibile $MA\beta\gamma$ şi $MB\alpha\gamma$ avem:

$$\hat{1} = \hat{1}' \quad \text{şi} \quad \hat{2} = \hat{2}'$$

Dar unghiurile $\overset{\frown}{AMB}$ şi $\overset{\frown}{\alpha M \beta}$ sunt egale ca având acelaş supliment $\overset{\frown}{BCA}$. Deci $\hat{1} = \hat{2}$ şi prin urmare

$$\hat{1}' = \hat{2}'$$

ceiace ne arată că punctele α, β şi γ sunt în linie dreaptă.

Dreapta $\alpha\beta\gamma$ se numeşte dreapta lui Simson a punctului M.

Reciproc, *dacă proecţiunile unui punct pe laturile unui triunghiu sunt în linie dreaptă, punctul e pe cercul circumscris al triunghiului.* E de ajuns a parcurge egalităţile de unghiuri din demonstraţia precedentă, în sens invers. Din egalitatea unghiurilor $\hat{1}' = \hat{2}'$, deducem egalitatea $\hat{1} = \hat{2}$ şi prin urmare $\overset{\frown}{BMA} = \overset{\frown}{\alpha M \beta}$. Dar acesta din urmă e suplimentar cu C. Deci, unghiurile $\overset{\frown}{AMB}$ şi C fiind suplimentare, patrulaterul ABCM este inscriptibil.

Proprietăţile dreptei lui Simson. *1. Fie* M, *intersecţia cercului circumscris cu proectanta lui* M *pe* BC. *Dreapta lui Simson a lui* M *e paralelă cu* AM'. Intr'adevăr avem: $\sphericalangle BAM' = \hat{2}$ ca având aceiaşi măsură în cercul circumscris. Pe de altă parte $\hat{2} = \hat{2}'$, deci $\overset{\frown}{BAM'} = 2'$, şi prin urmare dreptele $\alpha\beta\gamma$ şi AM' sunt paralele.

2°. *Dreapta lui Simson trece prin mijlocul segmentului care uneşte* M *cu ortocentrul triunghiului* H.

Fie N punctul unde MH'_a (v. fig.) întâlneşte BC. Dreptele AM' şi MH'_a sunt egal înclinate pe BC fiindcă sunt egal înclinate pe MM'; tot aşa, dreptele NH şi NH'_a sunt egal înclinate pe BC, căci punctele H şi H'_a sunt simetrice faţă de BC. Deci dreapta lui Simson e paralelă cu NH.

Dar în triunghiul dreptunghic $MN\alpha$, dreapta lui Simson a punctului M şi ipotenuza fiind de asemenea egal înclinate pe αN, dreapta lui Simson va trece prin mijlocul lui MN. Dreapta lui Simson fiind paralelă cu NH şi trecând prin mijlocul lui MN, va trece şi prin mijlocul lui MH.

3°. *Mijlocul m al segmentului* MH *se găseşte pe cercul medial* (cercul celor nouă puncte) de oarece ortocentrul este centrul de homotetie al cercului circumscris şi a cercului medial, raportul de omotetie fiind egal cu 2.

4°. *Dreptele lui Simson a două puncte* M *şi* P, *fac între ele un unghiu egal cu acela a cărui măsură pe cercul circumscris este arcul* MP.

Intr'adevăr, unghiul dreptelor lui Simson ale punctelor M şi P e egal cu unghiul M'AP', P' fiind punctul analog lui M', faţă de P.

Dar arc M'P' = arc MP.

5°. *Dreptele lui Simson a două puncte* M *şi* P *diametral opuse sunt rectangulare şi se tae în* K *pe cercul medial.*

Prima parte e evidentă în virtutea proprietăţii 4°. Pentru partea doua, e de ajuns a observa că punctele *m* şi *p* mijloacele dreptelor MH şi PH sunt pe cercul medial, aşa că unghiul *mKp* fiind drept, punctul K va aparţine cercului medial.

Dreptele lui Simson a câtorva puncte remarcabile.

a) Dreptele lui Simson ale vârfurilor unui triunghiu sunt înălţimile.

b). Dreptele lui Simson ale punctelor diametral opuse vârfurilor, sunt laturile triunghiului, în baza proprietăţii 5°, verificarea directă e evidentă.

c). Dreptele lui Simson ale picioarelor H'_a, H'_b, H'_c, *ale înălţimilor pe cercul* ABC, *sunt paralele cu tangentele în* A, B, C *la cercul circumscris şi trec prin vârfurile triunghiului ortic,* fiindcă coarda AH'_a e perpendiculară pe BC şi deci pentru a obţine direcţiunea dreptei lui Simson a lui H'_a, trebue să unim pe A cu el însuşi.

Dreptele lui Simson ale acestor puncte formează deci triunghiul antimedial al triunghiului ortic.

d). Dreptele lui Simson ale picioarelor bisectoarelor interioare pe cercul circumscris (mijloacele arcelor BC, CA şi AB) trec prin mijloacele laturilor *respective şi sunt perpendiculare pe bisectoare.*

Intr'adevăr, A_1 fiind mijlocul arcului BC, subîntins de unghiul A, piciorul perpendicularei scoborîte din A, pe BC e mijlocul A' al laturei BC; pe de altă parte A, fiind pe bisectoarea interioară dreapta care uneşte proecţiunile sale pe AB şi AC, e perpendiculară pe această bisectoare.

e) Dreptele lui Simson ale picioarelor bisectoarelor exterioare pe cercul circumscris, trec prin mijloacele laturilor respective şi sunt paralele cu bisectoarele interioare, în virtutea proprietăţii 5°.

Dreptele lui Simson joacă un rol însemnat în teoria ortopolului şi în faimoasa teoremă a lui Feuerbach. Intr'un articol viitor voi desvolta aceste proprietăţi.

NOTE MATEMATICE

O proprietate a segmentelor determinate de bisectoarele unui triunghiu pe laturile opuse.

Insemnând cu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 *segmentele determinate de bisectoarele unui triunghiu oarecare* ABC pe laturile opuse, îmi propun a determina relaţia:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}=$$

$$\frac{1}{R}\left(\cot A+\cot B+\cot C+\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

a, b, c fiind laturile triunghiului ABC. Se ştie că:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{c}{a},\quad \text{unde: } a_1+a_2=b$$

sau:

$$\frac{a_1+a_2}{a_1}=\frac{a+c}{c}=\frac{b}{a_1}\therefore a_1=\frac{bc}{a+c}\text{ şi }a_2=\frac{ab}{a+c}$$

In mod analog găsim:

$a_3 = \frac{ab}{b+c}$ și $a_4 = \frac{ac}{b+c}$, unde: $a_3 + a_4 = a$

$a_5 = \frac{ca}{a+b}$ și $a_6 = \frac{cb}{a+b}$, unde: $a_5 + a_6 = c$.

Vom avea deci:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}=$$

$$\frac{a+c}{bc}+\frac{a+c}{ab}+\frac{b+c}{ab}+\frac{b+c}{ac}+\frac{a+b}{ca}+\frac{a+b}{cb}$$

$$=\frac{2a+b+c}{bc}+\frac{2b+a+c}{ac}+\frac{2c+b+a}{ab}$$

$$=\frac{2a^2+ab+ac+2b^2+ab+bc+2c^2+bc+ac}{abc}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab)+a^2+b^2+c^2}{abc}$$

$$=\frac{4p^2+4S(\cot A+\cot B+\cot C)}{abc}$$

căci se cunoaște formula: $a^2+b^2+c^2=4S\Sigma\cot A$.

Ținând seama de formulele:

$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};\quad a=2R\sin A,$$

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C,\quad \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

ultima relație devine:

$$\Sigma\frac{1}{a_1}=\frac{64R^2\Pi\cos^2\frac{1}{2}A+8R^2\Pi\sin A\,.\,\Sigma\cot A}{8R^3\Pi\sin A}$$

sau:

$$\Sigma\frac{1}{a_1}=\frac{1}{R}\left(\Pi\cot\frac{1}{2}A+\Sigma\cot A\right)=$$

$$\frac{1}{R}\left(\Sigma\cot A+\Sigma\cot\frac{1}{2}A\right)$$

fiindcă $\Pi\cot\frac{A}{2}=\Sigma\cot\frac{A}{2}$

Q. E. D.

Fl. Er. Georgescu
cl. VIII R. lic. Cantemir București

Asupra problemei 13. (Vol. I, pag. 58). Intr'o notă din No. 3 al R. M. T., am dat o generalizare a problemei 13, cu ajutorul binomului lui *Newton*. In cele ce urmează voi da o altă generalizare, sugerată de o notă a d-lui *M. Ghermănescu*. (Vol. I, pag. 92).

Intr'un articol din Gazeta Matematică, (vol. XVII, Pag, 124), d-nul *G. Naneș*, sumează seria:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^n = x+2^\alpha x^2+3^\alpha x^3+\ldots+n^\alpha x^n+\ldots$$

unde $x<1$. Punând $x=\frac{1}{a}$, $a>1$, obținem seria

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=\frac{1^\alpha}{a}+\frac{2^\alpha}{a^2}+\frac{3^\alpha}{a^3}+\ldots+\frac{n^\alpha}{a^n}+\ldots$$

Pentru a suma seria (2), vom întrebuința metoda cu care d-l *G. Naneș*, a sumat seria (1). Dând lui α, valorile: 0, 1, 2,... avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\ldots+\frac{n}{a^n}+\ldots=$$

$$-a\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}\right)'=\frac{a}{(a-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{a^n}=\frac{1}{a}+\frac{2^2}{a^2}+\frac{3^2}{a^3}+\ldots+\frac{n^2}{a^n}+\ldots=$$

$$-a\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}\right)'=\frac{a^2-a}{(a-1)^3}$$

In acelaș mod avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{a^n}=-a\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{a^n}\right)'=\frac{a^3+4a^2+a}{(a-1)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{a^n}=-a\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{a^n}\right)'=\frac{a^4+11a^3+11a^2+a}{(a-1)^5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{a^n}=-a\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{a^n}\right)'=$$

$$\frac{a^5+26a^4+66a^3+26a^2+a}{(a-1)^5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{a^n}=-a\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{a^n}\right)'=$$

$$\frac{a^6+57a^5+302a^4+302a^3+57a^2+a}{(a-1)^7}$$

. . . . . .

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=-a\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{a^n}\right)'=$$

$$\frac{b_\alpha^1 a^\alpha+b_{\alpha-1}^2 a^{\alpha-1}+\ldots b_q^p a^{\alpha+1-q}+\ldots b_2^{\alpha-1}a^2+b_1^\alpha a}{(a-1)^{\alpha+1}}$$

Coeficienții lui a dela numărător formează triunghiul:

1

1 1

1 4 1

1 11 11 1

1 26 66 26 1

1 57 302 302 57 1

1 120 1191 2416 1191 120 1

1 247 4293 15619 15619 4293 247 1

. . . . . .

$$b_\alpha^1\ b_\alpha^2\ \ldots\ldots b_q^p\ \ldots\ldots b_2^{\alpha-1}\ b_1^\alpha$$

în care:

$$b_\alpha^1=b_1^\alpha=1;\quad b_p^q=p\,.\,b_p^{q-1}+q\,.\,b_{p-1}^q=b_q^p$$

Astfel:

$$57=5.1+2.26=5+52;$$

$$302=4.26+3.66=104+198.$$

ION T. RIZESCU
Constanța

Asupra chestiunei III dată la examenul de intrare în școala Politecnică la lucrarea scrisă.

La pagina 140 s'a publicat soluția acestei chestiuni. I se poate da și soluția următoare din care rezultă construcția grafică.

Pe prelungirea laturilor BA și CA și opus punctelor B și C luăm respectiv:

$$AB'=AC \text{ și } AB=AC'$$

$$AB\,.\,AB'=AC\,.\,AC' \qquad (1)$$

Prin ipoteză avem:

$$\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2=AB\,.\,AC$$

$$AP\,.\,AQ=AB\,.\,AB' \qquad (2)$$

Comparând (1) cu (2) deducem:

$$AP\,.\,AQ=AB\,.\,AB'=AC\,.\,AC'.$$

Deci punctele A, P, C, B', Q, C' sunt pe același cerc și patrulaterul BPCQ este prin urmare inscriptibil.

Bisectoarea exterioară a unghiului BAC este un diametru al cercului celor 6 puncte și o axă de simetrie a figurei.

Corzile PQ și B'C fiind perpendiculare pe această axă, avem

$$\text{arc } PC=\text{arc } B'Q \;\therefore\; \overset{\frown}{PBC}=\overset{\frown}{B'BQ}$$

Cum și $\overset{\frown}{PCB}=\overset{\frown}{PQB}$ triunghiurile PCB și și AQB sunt asemenea.

Restul ca în soluția publicată.

Din această soluție rezultă și modul de a construi punctele P și Q trasând cercul BCC'B'.

MAIOR O BUGEANU

RECREAȚIUNI MATEMATICE

Achile și broasca țestoasă.

Achile mergând de zece ori mai repede ca broasca țestoasă și aceasta fiind cu 1000 metri înaintea sa (de exemplu), Zenon pretindea că broasca țestoasă nu va fi ajunsă niciodată de către Achile. Iată raționamentul său: In timp ce Achile parcurge cei 1000 metri ce îi separa, broasca parcurge un drum de 10 ori mai scurt, adică 100 metri; în timp ce Achile parcurge acești 100 metri, broasca parcurge 10 metri; și așa mai departe. Achile se apropie din ce în ce mai mult de broască dar rămâne totdeauna un spațiu cari îi separă, astfel că în realitate broasca țestoasă nu este ajunsă niciodată.

(DIN ROUSE-BALL)
(Recréations mathématiques).

Ghicirea rezultatului unor operaţiuni. Rog pe o persoană să scrie unul sub altul 2 numere de câte patru cifre. Sub ele scriu şi eu un număr de patru cifre oarecare zic eu (în realitate aleg cifrele acestui număr astfel ca adunate cu cifrele corespunzătoare ale numărului de deasupra lui să ne dea totdeauna 9).

Rog încă pe aceiaşi persoană sau pe alta să mai scrie un număr de patru cifre, sub care voi scrie şi eu un alt număr de patru cifre oarecare zic eu (de fapt cifrele acestui număr adunate respectiv cu acelea de deasupra lui ne dă totdeauna 9). Trag apoi o linie orizontală sub ultimul număr şi scriu rezultatul imediat, fără a face adunarea, ceiace va surprinde evident pe cei prezenţi. Pentru mine lucrul e foarte uşor, fiindcă pun 2 înaintea primului număr scris şi micşorez cu 2 unităţi rezultatul.

Exemple:

3705	5241
2411	3100
7588	6899
9043	5342
956	4657
23703	25239

Explicaţie. Ultimele 4 numere adunate ne dau totdeauna 19998, care mărit cu 2 unităţi pe care le scot din primul număr am 20000. Acum 20000 adunat cu primul număr micşorat cu 2, evident că ne dă 2 urmat de primul număr micşorat cu 2 unităţi.

GEORGESCU ER. FLORIAN
lic. Cantemir Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

Buletinul asociaţiei de matematici pure şi aplicate. Anul II, No. 1, Septembrie 1922 Bucureşti. Calculul câtorva integrale definite de V. Alaci. Cursuri de matematici ţinute la Paris în anul 1921 — 1922 de P. Sergescu. Câteva observări asupra punctelor algebrice, de P. Sergescu.

No. 2, Octombrie 1922. Calculul tensorial de Tr. Lalescu. Cursuri de matematici ţinute la Paris în 1921—1922 (urmare) de P. Sergescu. Notions sur le calcul tensoriel de P. Nicolas.

No. 3, Noembrie 1922. Asupra funcţiilor de compoziţie de O Onicescu. Observări asupra criteriilor de convergenţă de Th. Angheluţă. Notions de le calcul tensoriel de P. Nicolas.

Gazeta Matematică. Anul XXVIII, No. 1, Septembrie 1922, Bucureşti. O rezolvare elementră a ecuaţiilor numerice de gradul al treilea de I. Ionescu. Mărimea indicatorului unui număr faţă de numărul divizorilor lui de Lt. I. Linteş.

No. 2, Octombrie 1922, Premiile concursului din 1916 I. Ionescu. O cubică remarcabilă în legătură cu o nouă generalizare a teoremei lui Simson de Cristea Mateescu. Asupra unei curbe remarcabile de M. Chermănescu.

No. 3, Noembrie 1922. Aritmetica Românească de C. D. Orăşeanu. Calcularea câtorva integrale definite de V. Alaci. Munca Matematică de I. Ionescu.

L'Education Mathématique. 1 Octombrie 1922. Asupra tetraedrelor ale căror muchi opuse sunt două câte două egale de V. Thébault. 15 Octombrie 1922. Chestiuni de maxim şi minim. 1 Nombrie 1923. Chestiuni de maxim şi minim (urmare).

Anuarul Societăţei Matematice Bârlădeană 1921—1922. Conţine procesele-verbale ale şedinţelor Societăţei, ţinute săptămânal de elevii liceului sub conducerea d-lui prof. *N. Martiniuc*, începând dela 26 Februarie 1922 până la 12 Mai 1922. Conţine asemenea şi soluţiile problemelor propuse în şedinţele societăţei.

Note matematice şi ştiinţifice. Este buletinul oficial a Societăţei Matematice dela liceul „Carol I" din Craiova: Seria I, No. 4, Teoria relativităţei lui Einstein de St. G. Gorjan. Despre Gymnoti de Radu Vişoreanu: Despre Telmecanica de T. S. Ivanovici, No. 5. Teoria relativităţei lui Einstein de St. Gh. Gorjan (urmare). Lupta între vapori şi electricitate (după Sciences & Voyages).

Observare. Aceste două asociaţiuni matematice a elevilor celor două licee sunt zorile unei activităţi sănătoase în ogorul matematic al Ţărei noastre şi dorim ca şi elevii altor licee să aibă astfel de preocupări.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECNICA DIN TIMIŞOARA

6 Octombrie

SOLUTIILE CHESTIUNILOR DE ALGEBRA
date la proba scrisă

Chestiunea I. Să se rezolve ecuaţiunea,

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

şi în urmă să se studieze variaţiunea funcţiunei,

$$y = \mathrm{L}\frac{x^3 + x^2 - 2}{10} - \operatorname{arc\,tg}(1 + x) - \frac{3x}{2}$$

L *însemnând logaritm neperian.*

Primul membru al ecuațiunei, $x^3+x^2-2=0$, observăm că se anulează pentru $x=1$, deci se divide cu $x-1$ și găsim astfel:

$$(1) \qquad x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)=0.$$

Rezultă că rădăcinile ecuației date sunt:

$$x_1=1, \quad x_{2,3}=-1\pm i$$

Trecem acum la studiul variațiunei funcțiunei date.

Vom preciza întâi intervalul în care poate varia x, pentru ca y să fie real.

Pentru aceasta observăm că primul termen din expresiunea lui y este real, numai dacă,

$$(1) \qquad x^3+x^2-2\geq 0.$$

Cum am văzut că,

$$x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$$

și cum factorul x^2+2x+2 are rădăcini imaginare și este astfel totdeauna positiv (de semnul lui x^2), rezultă că relația (1) este satisfăcută numai pentru $x\geq 1$.

Cum al 2-lea și al 3-lea termen din expresiunea lui y sunt reali pentru orice valori ale lui x, rezultă că numai pentru

$$1\leq x\leq\infty$$

funcțiunea dată este reală.

Determinăm acum valorile lui x pentru care y este maxim sau minim, adică acelea care anulează derivata.

Derivata este:

$$y'=\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2-2}-\frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{3}{2}=$$

$$\frac{2(3x^2+2x)-2(x-1)-3(x^3+x^2-2)}{2(x^3+x^2-2)}=$$

$$\frac{-3x^3+3x^2+2x+8}{2(x^3+x^2-2)}$$

Această fracție fiind ireductibilă, vom anula numai numărătorul.

Vom rezolva deci ecuațiunea:

$$(2) \qquad 3x^3-3x^2-2x-8=0.$$

Cercetăm întâi dacă nu are rădăcini întregi, adică dacă vreunul din divizorii lui 8 nu o satisface. Ușor găsim că $x=2$ anulează primul membru al ecuațiunei, care deci se divide cu $x-2$ și găsim:

$$3x^3-3x^2-2x-8=(x-2)(3x^2+3x+4)=0.$$

Rădăcinile ecuației (2) sunt,

$$x_1=2, \quad x_{2,3}=\frac{-3\pm i\sqrt{39}}{6}$$

adică o singură rădăcină reală.

Cercetând semnul lui y' care se poate scrie,

$$y'=-\frac{(x-2)(3x^2+3x+4)}{2(x^3+x^2-2)}$$

vedem că y' se anulează pentru $x=2$, trecând dela positiv la negativ. Pentru $x=2$ funcțiunea este deci maximă și găsim:

$$\max y=-3-\operatorname{arc\,tg}\,3$$

Dacă căutăm în tablele lui Dupuis la liniile trigonometrice naturale, deducem că, $\operatorname{arc\,tg}\,3=71^0,34'$, care transformat în lungime ne dă 1,25 cu o aproximație de 0.01 în plus.

Atunci,

$$\max y=-4.25.$$

Ne-ar mai trebui valorile reale ale lui x, care anulează pe y.

Am avea de rezolvat astfel o ecuație transcendentă nu tocmai simplă. Din faptul însă că peutru $x=1$, $y=-\infty$, că pentru $x=2$ funcțiunea are un maxim negativ $(-4,25)$ și apoi descrește, rezultă că funcțiunea dată nu are rădăcini reale, curba reprezentativă nu va tăia astfel axa x-lor.

Rămâne să mai calculăm valoarea lui y pentru $x=\infty$.

Pentru $x=\infty$, y ia forma $\infty-\infty$ și trebue să-i găsim adevărata valoare. Putem scrie:

$$\lim_{x=\infty} y=\lim_{x=\infty}\left[\mathrm{L}(x^3+x^2-2)-\frac{3x}{2}\right]-\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{L}\,10\right)$$

Dar,

$$\lim_{x=\infty}\left[\mathrm{L}(x^3+x^2-2)-\frac{3x}{2}\right]=\lim_{x=\infty} x\left[\frac{\mathrm{L}(x^3+x^2-2)}{x}-\frac{3}{2}\right]$$

Expresiunea,

$\frac{\mathrm{L}(x^3+x^2-2)}{2}$ luând pentru $x=\infty$, forma $\frac{\infty}{\infty}$, putem aplica teorema lui *Hôpital* și avem

$$\lim_{x=\infty}\frac{\mathrm{L}(x^3+x^2-2)}{x}=\lim_{x=\infty}\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2-x}=0$$

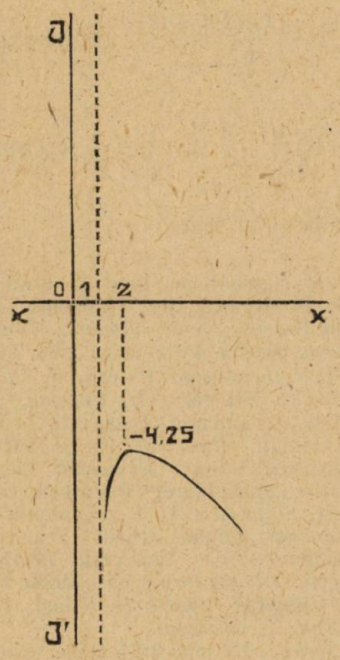
Rezultă atunci că:

$$\lim_{x=\infty} y=-\infty$$

Rezumând cele de mai sus, avem următorul tablou de variație:

x	1		2		$-\infty$
y'	+ + + +	0	-	-	-
y	$-\infty$ crește		-4.25 M	descrește	$-\infty$

Curba care reprezintă variația funcțiunei este cea alăturată.



Chestiunea II. Să se determine a astfel ca ecuațiunea

$$(1)\quad x^4 - a x^3 + 4 a x - 16 = 0$$

să aibă o rădăcină dublă, iar celelalte două să fie egale și de semne contrare. Se cere încă a se forma ecuațiunea ale cărei rădăcini sunt produsele două câte două a rădăcinelor ecuației (1), unde s'a înlocuit a cu valoarea determinată.

Prima soluție. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinele ecuației (1), atunci utilizând relațiunile între rădăcini și coeficienți avem:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0 \\ x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2) = -4a \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = -16 \end{cases}$$

Cum prin ipoteză, $x_1 = x_2$, $x_3 = -x_4$, relațiunile (2) devin după oarecare simplificări:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} \\ x_1^2 - x_3^2 = 0 \\ 2 x_1 x_3^2 = 4a \\ x_1^2 x_3^2 = 16 \end{cases}$$

Introducem valoarea lui x, din prima relație în a 3^a și deducem $x_3^2 = 4$

de unde, $x_3 = \pm 2$

A 2^a relație din (3) ne dă, $x_1 = \pm 2$ și deci $a = \pm 4$.

Ecuația dată devine atunci:

$$(4)\quad x^4 \mp 4 x^3 \pm 16 x - 16 = 0,$$

rădăcinele ei fiind 2, 2, 2, -2.

Trecem acum la partea a doua a chestiunei.

Produsele două câte două a rădăcinelor ecuației (4) sunt

$$4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ -4,$$

și ecuația care admite aceste rădăcini este:

$$(x-4)^3 (x+4)^3 = (x^2 - 16)^3 = 0,$$

sau,

$$x^6 - 48 x^4 + 768 x^2 - 4096 = 0.$$

Soluția a 2. Ecuația dată se poate scrie:

$$x^4 - 16 - a x (x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) - a x (x^2 - 4) = 0$$

$$\overset{*}{.}\overset{*}{.}\quad (x^2 - 4)(x^2 - a x + 4) = 0.$$

De aici rezultă că, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$,

iar celelalte 2 rădăcini sunt date de ecuația:

$$(2)\quad x^2 - a x + 4 = 0$$

Cum cele 2 rădăcini aflate sunt egale și de semne contrare (2 și -2), rezultă ținând seamă de enunț că ecuația (2) trebue să aibă: 1) sau o rădăcină dublă; 2) sau una din rădăcinele ei trebue să fie 2 și cealaltă tot 2, sau o rădăcină trebue să fie -2 și cealaltă tot -2, fiindcă numai în aceste cazuri ecuația dată poate avea o rădăcină dublă și celelalte două rădăcini egale și de semne contrare.

Pentru satisfacerea primului caz, deducem condiția:

$$a^2 - 16 = 0,$$

$$\overset{*}{.}\overset{*}{.}\quad a = \pm 4.$$

Celelalte 2 cazuri ne conduc tot la aceleași valori ale lui a.

Ecuația dată devine atunci

$$x^4 \mp 4 x^3 \pm 16 x - 16 = 0$$

cu rădăcinele 2, 2, 2, -2.

Partea a 2^a a chestiunei, se stabilește la fel ca la prima soluție.

V. A.

PROBLEME REZOLVATE

108. — *Să se arate că:*

$$\sum_{p=1}^{n} (C_p^2)^2 + \frac{1}{2}(C_{n+1}^2)^2 = \frac{1}{20} S_2 (3n^2 + 3n + 4)$$

unde S_2 *este suma patratelor primelor numere şi* C_p^2 *este numărul combinărilor.*

TH. ANGHELUTA

Soluţie dată de d-l *Alexandrescu I. Mihai*, cl. VIII Constanţa.

Membrul I îl putem scrie succesiv:

1) $(C_2^2)^2 + (C_3^2)^2 + (C_4^2)^2 \ldots + (C_n^2)^2 + \frac{1}{2}(C_{n+3}^2)^2$

sau:

2) $\left(\frac{2.1}{1.2}\right)^2 + \left(\frac{3.2}{1.2}\right)^2 + \left(\frac{4.3}{1.2}\right)^2 \ldots + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)n}{1.2}\right]^2$

sau:

3) $\frac{1}{4}\left[2^2(2-1)^2 + 3^2(3-1)^2 + 4^2(4-1)^2 \ldots + n^2(n-1)^2 + \frac{(n+1)^2 n^2}{2}\right]$

de unde:

4) $\frac{1}{4}\left[(2^4 - 2.2^3 + 2^2) + (3^4 - 2.3^3 + 3^2) \ldots + (n^4 - 2n^3 + n^2) + 2\frac{(n+1)^2 n^2}{4}\right]$

sau:

5) $\frac{1}{4}[1^4 + 2^4 + 3^4 \ldots + n^4 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 - 2(1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + n^3) + 2S_3]$

de oarece $2\frac{(n+1)^2 n^2}{4} = 2S_3$. Membrul întâi dar, devine:

6) $\frac{1}{4}(S_4 + S_2)$ S_4 calculat este:

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

şi $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ atunci expresiunea (6) devine

$$\frac{1}{4} S_2 \left\{\frac{3n^2+3n-1}{5} + 1\right\} = \frac{1}{20} S_2 (3n^2 + 3n + 4)$$

tocmai membrul al II-lea.

Au mai rezolvit problema bine şi d-nii: *Mircea Bobârnac* Şcoala Politecnică din Timişoara, *Mircea Cocorandu* cl. VIII Braşov, *Octav Ulmann*, *Const. Iorgulescu* şi *I. Coşereanu* Şcoala Politecnică din Timişoara, *Em. V. Soceanu*, *I. N. Teodorescu* Ploeşti, *M. Gh. Săvescu* Iaşi, *Samovici Isidor* cl. VII particular Focşani, *Const. E. Georgescu* cl. VII lic. „Cantemir" Bucureşti, *Traian A. Dordea*, *Ion I. Iliescu* Galaţi, *Silion Gh. Ion* cl. VII Câmpina, iar din cl. VI următorii d-ni: *Alexandru Tauber* Botoşani, *Emil Ştefănescu* „Spiru-Haret" Bucureşti, *Geanău Ion* lic. „Internat" Iaşi, *Stoenescu Al. I.* „Cantemir-Vodă" Bucureşti, *I. Şerbănescu* „Mihai-Viteazul" Bucureşti, *Dragomir N. Ioan* „Cantemir-Vodă" Bucureşti, *Florian Er. Georgescu* Bucureşti, *Tiberiu Popoviciu* „Moise Nicoară" Arad, *Silion Gh. I.* Câmpina, *Vasilin D. I.* Iaşi, *A. Miclescu. N. Pârâianu*, *Uirgil C. Vasilescu.*

D-l *I. N. Şerbănescu* mai dă a doua soluţie, analoagă cu cea de mai sus.

126. — *Să se rezolve ecuaţia trigonometrică următoare:*

$$\sin^2 2x = \sin^2 x + \sin x.$$

PUIU JUSTER

Avem succesiv

$$4\sin^2\cos^2 x = \sin^2 x + \sin x$$
$$\sin x[4\sin x\cos^2 x - \sin x - 1] = 0$$
$$\sin x[4\sin x(1-\sin^2 x) - \sin x - 1] = 0$$
$$\sin x[4\sin^3 x - 4\sin x + \sin x + 1] = 0$$
$$\sin x[4\sin x(\sin^2 x - 1) + (\sin x + 1)] = 0$$
$$\sin x(\sin x + 1)(4\sin^2 x - 4\sin x + 1) = 0$$
$$\frac{1}{4}\sin x(\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

De unde deducem ecuaţiile:

$$\sin x = 0$$
$$\sin x + 1 = 0$$
$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

De unde scoatem succesiv soluțiunile:

$$x_{1,1} = k\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + (2k'+1)\pi$$

$$x'_2 = 2k' - \frac{\pi}{2}$$

$$x_{3,4} = \frac{\pi}{6} + 2k''\pi$$

$$x'_{3,4} = (2k''+1)\pi - \frac{\pi}{6}$$

unde k, k', k'' sunt niște întregi oarecare positivi sau negativi. Acestea sunt toate soluțiile ecuațiunei, 8 grupe, cum este și natural.

Notă. Deși problema este extrem de simplă, cei mai mulți din corespondenții noștri s'au mulțumit să dea numai unele din soluții, omițând din eroare celelalte sau nedându-le nici o importanță. Scopul acestei probleme ca și acelea a celor mai multe care se propun în Revista noastră, tot atât de ușoare, nu este de a se vedea că cutare corespondent știe s'o rezolve principial sau s'o schițeze, ci să se deprindă cu complecta ei rezolvare și discuție, să se vadă că a fost cu totul pătruns de soluțiile la care au ajuns și că toată chestiunea ce o privește, așa cum este propusă, este complet studiată

Soluție complectă, au dat numai următorii d-ni: *Beșliu Gh. Constantin* student Școala Politecnică din Timișoara, *Aiex. Scodreanu* lic. din Silistra și *Tiberiu Popoviciu* lic. „Moise Nicoară" Arad, *Crăinicescu E., Dragomirescu B. Ed. și Ulman O.* Timișoara, *Dumitriu A.* lic. M-rea Dealu, *Marinescn Gh.* Pitești, *Pinchis A. M., Weis L.* Galați și *Sch nfeld C.* Botoșani, *Brătescu St. Mihaii, Dili C. Sshileru, C. Berdan, Solomon Alfred, Al. Moroianu.*

Ceilalți corespondenți, au dat numai unele din soluțiile ecuației, unii au înlocuit $y = \sin x$ sau au aplicat formulele lui Cardan, unii au aplicat logaritmii expresiunilor simple și cunoscute a sinusurilor, pentru a afla unghiurile, ba unii au găsit și soluții imaginare!

Observare. D-l *Al. Brăileanu* Constanța, consideră ecuația mai generală $\sin^2 2nx = \sin^2 nx + \sin nx$, pe care o rezolvă analog.

D-l *Popovici Th. Ioan* observă că pot fi și alte ecuații analoage cu cea propusă, indicând câteva.

127. — *Să se rezolve ecuația următoare:*

$$\operatorname{ctg} x - 2\sin^2 x = 0.$$

A. Th Nicolau

I. Vom avea succesiv:

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4\sin^4 x$$

$$1 - \sin^2 x = 4\sin^6 x$$

$$4\sin^6 x + \sin^2 x - 1 = 0$$

$$(2\sin^2 x - 1)(2\sin^4 x + \sin^2 x + 1) = 0$$

de unde $2\sin^2 x - 1 = 0$

$$2\sin^4 x + \sin^2 x + 1 = 0,$$

Ecuația doua ne dă soluții imaginare pentru $\sin^2 x$ și deci nu se ia în considerație. Din a doua scoatem

$$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

de unde $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ne dă $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$x'_1 = (2k+1) - \frac{\pi}{4}$$

și $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ne dă

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x'_2 = (2k+1)\pi - \frac{5\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

Combinând pe aceste grupe de soluții, putem scrie

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

care este soluția generală a problemei, din care va trebui să vedem, care satisface ecuației date, căci prin ridicare la patrat, se poate să fi introdus, vre-o soluție străină. In adevăr încercând pe prima positivă ecuația este satisfăcută. Incercând $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ avem

$$\operatorname{ctg} x = -1 \text{ și dar } \quad -1 - 2\frac{2}{4} = -2 \neq 0$$

și deci ecuația nu este satisfăcută.

Prin urmare unica soluție reală și bună a ecuației propuse este $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

II. Inlocuim $\sin^2 x$ cu $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$ și avem

$$\operatorname{ctg} x - \frac{2}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = 0.$$

$$\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x - 2 = 0$$

$$(\operatorname{ctg} x - 1)(\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x + 2) = 0$$

de unde $\operatorname{ctg} x = 1$ și $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x + 2 = 0$

A doua ecuație are rădăcini imaginare și nu este de luat în considerație iar prima ne dă

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

adică ca și în cazul precedent.

Notă. Colaboratorii noștrii care au găsit pe x prin cotangentă sau tangentă, au găsit soluția bună; iar colaboratorii ce au găsit pe x prin sinus sau cosinus, au găsit și alte valori, afară de cea de mai sus. Mulți din colaboratorii din primul caz au dat pentru x:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{și} \quad x_2 = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}$$

în loc să dea $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, unde k poate fi par sau impar. In ce privește pe cei dela al doilea caz, le atragem atențiunea, că unei ecuații atât de simple, putea să-i dea soluția exactă și bine studiată.

Regretăm că au dat atenție atât de puțin soluțiunei la care au ajuns și că mai toate problemele de acest fel, atât de ușoare, sunt aproape cu totul greșite, mai ales atuncea când arcul rezultă din mai multe valori a sinusului sau a cosinusului. Unii au aplicat și logaritmii perzându-se în calcule lungi și cu totul inutile, pentru aflarea arcului, cu toate că au ajuns la expresiuni simple, ce trebuiau să le știe.

Printre colaboratorii soluției prin tangentă indicăm pe următorii d-ni: *Nicu Pârâianu* (Școala Navală Constanța), *Iordache N. Ioan* student, *Muș Orest*, *Andrei Miclescu* Școala Militară de Artilerie, *Beșliu Gh. Constantin* student Politecnica din Timișoara, *I. N. Georgescu-Val* Șc. Militară de Artilerie, *Pavel I. Dumitrescu* student Pitești, *Virgil C. Vasilescu* cl. VIII Ploești, *Scodreanu Alexandru* Silistra, *Jean A. Propst* T.-Severin, *Al. Brăileanu*, *Bogdan M.*, *Florea Negretzu*, *Lăzărescu Fl. Ștefan*, *Virgil Ghițescu* București, *Alex. Tauber*, *I. N. Iancu* cl. VII modernă lic. Târgoviște, *Mircea Cocorandu* Brașov, *Eugen Ionică* Brașov, *Silion Gh. Ion* Ploești, *Em. Iliescu*, *Beldie N. Dumitru*, *Mihăescu D. Constantin*, *Florian Er. Georgescu* București, *Tiberiu Popoviciu* Arad, *Popa I. Teodoru* (prin sinus a aflat soluția exactă), *Prătici Ioan*, *Stoenescu Al. I.* București, *Emil Ștefănescu* București, *Const. Chiorescu*, *Iulian M. Nicolau*, *Mihai Stamatiu*, *Eugen Scoruțeanu*, *I. St. Teodorescu*, *I. Th. Popovici*, *Dili C. Schileru* și *Amărăscu O. Gavril*, *Mireea I. A*, Constanța, *Pinchis M.* și *Weis L*, Galați.

Au dat cea de a doua soluție prin sinus sau cosinus, următorii d-ni: *Ion Coșereanu* Piatra-Neamț $\left(\text{cu } x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ *Cristea Goilav* București, *Mihail Alexandrescu* Constanța, *Jean A. Propst*, *Pincu Katz*, *Emil Bercovici*, *I. Flickstein* Cernăuți, *I. M. Focșeneanu*, *Tenea Ioan* (numai $(x = 45^0)$, *Dragomir N. Ioan* (soluție bună), *Jean T. Lăzărescu*, *Popescu N. Ștefan*, *C. Berdan*, *Mehlmann Theodor* (cu logaritmi, soluție bună), *Ionescu I. Ilie* (numai $x = 45^0$), *Ciolacu St. Miron* (cu logaritmi), *Trincă D. Marin* (idem), *Dobrescu M. Filip* $(x = 45^0 + 2k\pi)$, *Samoilă Dumitru* $\left(\sin x = \pm\frac{1}{2},\ \sin x = \pm\frac{1}{4}\right)$ *Cristea Rigani*, $(x = 2k\pi + 45^0)$, *Gr. C. Moisil*, *V. C. Vicoveanu*, *Moroianu At.* și *S. Klein* (soluție bună).

D-l *Alexandru Brăileanu* studiază ecuația mai generală $\operatorname{ctg} nx - 2\sin^2 nx = 0$ care are rădăcini reale sau imaginare după cum $n \leq \frac{1}{2}$ sau $n > \frac{1}{2}$

M. V.

128. — Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare există relațiunea:

$$\Sigma \sin 2A \sin 2B + 2\Sigma \sin^2 A = 4\Sigma \sin^2 A \sin^2 B.$$

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Soluțiune dată de d-l *Ion Coșereanu*, student anul I, Școala Politecnică din Timișoara.

Pornim dela relațiile cunoscute: $\sin(A+B) = \sin C$

$$\sin(B+C) = \sin A, \quad \sin(A+C) = \sin B$$

pe care le ridicăm succesiv la patrat.

Pentru prima, avem:

$$\sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2\sin B \cos C \cos B \sin C = \sin^2 A$$

$$\sin^2 B(1 - \sin^2 C) + \sin^2 C(1 - \sin^2 B) + \frac{1}{2}\sin 2B \sin 2C = \sin^2 A$$

$$\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin^2 B \sin^2 C + \frac{1}{2}\sin 2B\, 2\sin C = \sin^2 A$$

iar pentru celelalte două, avem de asemenea:

$$\sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin^2 A \sin^2 B + \frac{1}{2}\sin 2A \sin 2B = \sin^2 C$$

$$\sin^2 A + \sin^2 C - 2\sin^2 A \sin^2 C + \frac{1}{2}\sin 2A \sin 2C = \sin^2 B$$

de unde prin adunare obținem:

$$2\Sigma \sin^2 A - 2\Sigma \sin^2 A \sin^2 B + \frac{1}{2}\Sigma \sin 2A \sin 2B = \Sigma \sin^2 A$$

sau

$$\Sigma \sin^2 A - 2\Sigma \sin^2 A \sin^2 B + \frac{1}{2}\Sigma \sin 2A \sin 2B = 0$$

și în fine

$$\Sigma \sin 2A \sin 2B + 2\Sigma \sin^2 A = 4\Sigma \sin^2 A \sin^2 B$$

care-i relația cerută.

Au dat încă asemenea soluțiuni și următorii d-ni: *Cristea Goilav* student Tecuci, *I. N. Georgescu-Val* și *Andrei Miclescu* Școala Militară de Artilerie Timișoara, *Dragomir N. Ioan* cl. VII lic. „Cantemir-Vodă" București și *Tiberiu Popoviciu* cl. VII lic. „Moise Nicoară" Arad. Pe alte căi, au rezolvit'o d-nii: *M, Cocorandu* cl. VIII lic. Brașov, *Silion Gh. Ion* Ploești, *Const. Berdan* Văleni-Tutova, *Georgescu C. Ioan* Pitești, *Popescu N. Ștefan, Ioan B. Ionescu* Pitești, *Teodorescu N. I.* Ploești, *Brătescu H. Mihail, Florian Er. Georgescu* București, *Emil Ștefănescu* București, *Stoenescu Al. I.*

D-l *Coșereanu Ion* mai deduce câteva relații, analoage cu precedenta, prin înlocuirea în expresia de mai sus a sinusului prin cosinus sau prin considerarea segmentelor dintre ortocentru și vârfuri pe cele trei înălțimi. In special ajung la relația identitate din „Gazeta Matematică", vol. XX, No. 11, pag. 422.

D-l *Florian Er. Georgescu* dă de asemenea două relațiuni.

151. — *Să se se afle derivata funcțiunei:*

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

PINCU KATZ

Prima soluție. Observăm că:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \sin x} = \frac{\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

Funcțiunea dată devine:

$$y = \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\right]$$

$$\therefore \quad y = \frac{3\pi}{4} - x$$

și deci:

$$y' = -1.$$

Soluție dată de d-nii: *Berdan C.* Bârlad, *Brătescu-Vâlcea, Cocorandu M.* Brașov, *Georgescu Fl.* București, *Goilav Cr., Mehlmann Th.* Câmpulung Bucovina, *Nicolau I.* Pitești, *Pârâianu N.* Șc. Navală, *Popovici T.* Arad, *Rigani Cr., Schileru C. D., Scodreanu A., Teodorescu St. Teodorescu N.* Chișinău și *Ulman O.*

A 2ª soluție. Notând,

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = u,$$

avem:

$$y = \operatorname{arc\,tg} u$$

Atunci,

$$(1) \qquad y' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

unde,

$$u' = \frac{-(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^3}$$

Inlocuind în (1) valorile lui u' și u și simplificând cu $(\sin x - \cos x)^2$, obținem:

$$y' = -\frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2} = -1.$$

Soluție dată de d-nii: *Alexandrescu M.* Constanța, *Amărăscu G., Babiciu D., Bogdan M., Ciolacu M., Ionescu I., Ionescu L., Marin T., Ristea M.* Caracal, *Bobârnac M., Bosoancă M.*, subloc., *Bușilă A., Călin A., Georgescu Fl., Ghițescu V., Nicolau Gh. A., Petrescu-Cernea* București, *Coșereanu I., Crăinicescu E., Dragomirescu, Georgescu-Val, Ioniță I., Miclescu A., Musta St., Ulman O.* Timișoara, *Dan V., Klein I., Marcovici J., Măru D., Stănescu D.* Galați, *Georgescu T., Tedorescu I.* Ploești, *Gogălni-*

ceanu Brăila, *Lăzărescu I., Negretzu Fl., Dumitrescu P.* Pitești, *Macri S.* Botoșani, *Mihăilescu C., Rădulescu St.* Giurgiu, *Oprișan Er.* Brăila, *Solomon A.* Călărași, *Stănescu N.* Craiova, *Mocanu A., Teodoru N.* Huși, *Terescenco N.* Chișinău, *Timotin D.* Oradea-Mare, *Plutarc C.*, st. drept, *Dordea Tr., Goilav Cr., Mehlmann T., Stamatiu M., Ștefănescu E.* și *Sufletel P. A.* abs. lic. M-rea Dealu.

Notă. D-nii Popovici T., Georgescu-Val și Georgescu Fl., au calculat și derivatele funcțiunilor,

$$y = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x},\quad y = \operatorname{art\,tg}\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x};$$

$$y = \operatorname{arc\,cot}\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x},\quad y = \operatorname{arc\,sin}\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x}$$

și a altora analoage.

PROBLEME PROPUSE

296. — Să se găsească numerile de trei cifre, știind că diferența dintre ele și suma cifrelor lor, este un cub perfect.

AL. PANULA

297. — Dacă a și n reprezintă numere întregi oarecari, iar p un număr prim, să ce demonstreze congruența:

$$\sum_{i=1}^{n} a^{ip} \equiv \frac{a^{n+1} - a}{a - 1},\ (\text{mod. } p)$$

LOCOT. GRIGORE ZAPAN.

298. — Într'un triunghiu A B C, latura A B este fixă, iar latura A C păstrează o lungime constantă. Se cere locul picioarelor bisectoarelor unghiului A pe latura opusă.

D. MARU

299. — Vârful A al unui triunghiu A B C este fix, iar vârfurile B și C se mișcă pe 2 drepte paralele Δ_1 și Δ_2. Eie D și E intersecția lui A C și A B respectiv cu Δ_1 și Δ_2. Să se demonstreze că dacă suprafața triunghiului A B C este constantă, atunci lungimele B D și C E sunt și ele constante și reciproc.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

300. — Dacă $x + y + z = 0$, atunci $x^7 + y^7 + z^7$ este divizibil cu $x^3 + y^3 + z^3$.

V. ALACI

301. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2 y + y^2 x = \alpha - \dfrac{1}{\alpha} \\ x^3 + y^3 = \dfrac{1}{\alpha^3} - \alpha^3. \end{cases}$$

TH. ANGHELUTA

302. — Să se determine p și q, astfel ca expresiunea

$$\frac{x^2 + p x + q}{x + 1}$$

să aibă un minimum egal cu 1 pentru $x = 1$. (Se cere o soluție și fără ajutorul derivatelor).

N. ABRAMESCU

303. — Să se arate că într'un triunghiu avem:

$$\frac{b c \sin 2A + a c \sin 2B + a b \sin 2C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} = a \cot A + b \cot B + c \cot C.$$

T. POPOVICI.

304. — Elementele unui triunghiu fiind cele obicinuite, să se demonstreze relațiile:

$$\sum \frac{a}{b + c}\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$$

$$\sum \frac{1}{a(b + c)}\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p}{2 r\, abc}$$

FLORIAN ER. GEORGESCU

INFORMATIUNI

Au fost numiți profesori la Școala Politecnică din Timișoara, la începutul anului școlar, următorii:

Ing. Bănărescu M., mașini technice,
Ing. Nicolau P., idraulică,
Ing. Lupan A., cazane, încălzit,
Dr. Ionescu-Argetoaia I., geologia,
Ing. Mardan D., sondaje, petrol,
Dr. Toporescu E., conferențiar chimie,
Dr. Lambrino Gh., economie politică.

Academia Română a acordat Școalei Politecnice din Timișoara bursa *Leon S. Arié*, de 300 lei pe lună. Această bursă se acordă unui student din anul I, al Școlii pentru durata de patru ani cât durează școala, în urma recomandării Consiliului profesoral. Pentru această bursă a fost recomandat d l *Lupă I.* student în anul I, al școlii.

S'a reînceput ciclul de conferințe publice ce se țin la Școala Politecnică, și care au avut anul trecut un deosebit succes.

Deschiderea s'a făcut prin conferința d-lui *V. Vâlcovici*, directorul școlii care a vorbit despre mișcarea pământului.

Conferințele vor avea loc în fiecare Marți la ora 6 p. m., după următorul program:

5 Dec. V. Vâlcovici, Mișcarea pământului.
12 Dec. I. Jeannel, O călătorie în Africa (cu proecțiuni).
19 Dec. V. Blasian, Chestiunea subsolului.
26. Dec. D. Leonida, Viața și opera lui Faraday.

Ele se vor continua și după Crăciun după programul ce se va stabili la timp, întrucât mulți conferențiari dela București, Iași și Cluj s'au anunțat cu conferințe.

In publicul din Timișoara aceste conferințe au stârnit un mare interes și sala este neîncăpătoare pentru numerosul public care vine să asculte. Conferințele sunt cercetate și de studenți care vin în număr foarte mare.

Lucrările noului pavilion al Școalei Politecnice au fost întrerupte odată cu sosirea iernei. S'au construit până acuma fondațiile și zidăria primului etaj. In primăvară se va continua cu zidăria mai departe, așa că până la Septembrie viitor clădirea să fie gata și să se poată începe cursurile în toamnă acolo. Instalația interioară pentru laboratoare este deja comandată așa că se vor putea începe și lucrările la laborator pentru anii superiori.

Este probabil că în anul următor să se înceapă clădirea unui nou pavilion pentru laboratorul de mașini, care va cuprinde sălile de mașini și de încercări pentru secția mecanică.

Rugăm pe corespondenții noștri a scrie fiecare problemă pe o foaie separată, sau pe foi prinse la un loc.

Cauza este că problemele sosite se repartizează pe numere și e clar că scriind pe aceiași foaie două sau mai multe probleme, repartizarea lor nu se poate face.

INSTITUT DE ARTE GRAFCE
„CARTEA ROMÂNEASCĂ"
TIMISOARA.

ANUL II. 15 IANUARIE 1923 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENULUI 30 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. ERNEST ABASOHN DESPRE COORDONATE PUNCTULAE SI TANGENTIALE
2. NOTE MATEMATICE.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN
5. PROBLEME REZOLVATE.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1923

Abonamentul pe anul III-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă 50 (cincizeci) lei și se trimite pe adresa: **ING. C. TEODORESCU,** Subdirectorul Școalei Politecnice **Timișoara.**

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politecnice din Timișoara.

ANUL II. — NO. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

DESPRE COORDONATE PUNCTUALE ȘI TANGENȚIALE

ERNEST ABASOHN
Inginer, Licențiat în Matematici
Profesor la liceul Cantemir-Vodă Bucureşti

1. O curbă oarecare poate fi privită ca luând naştere în două chipuri deosebite: 1° prin mişcarea *continuă* a unui punct a cărui urmă este curba considerată 2° prin mişcarea *continuă* a unei drepte care rămâne în fiecare moment tangentă la curbă.

In manualele de geometrie analitică pentru licee, studiul dreptei, cercului şi celorlalte conice se face pornind dela primul mod de generare amintit mai sus; curbele sunt studiate astfel din punct de vedere punctual iar coordonatele utilizate se zic *punctuale*.

Relaţiunea.

$$F(x, y) = 0$$

care exprimă legătura ce trebue să existe între coordonatele unui *punct oarecare* $M(x, y)$ pentruca el să fie situat pe o curbă anumită, se numeşte şi *ecuaţiunea punctuală a acelei curbe*.

In mod analog, pentru o dreaptă de ecuaţiune

$$u x + v y + w = 0$$

coeficienţii u, v, w (sau trei cantităţi proporţionale cu acestea) se numesc coordonatele dreptei; relaţiunea

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

care exprimă legătura ce trebue să existe între coordonatele unei *drepte oarecare* pentruca ea să fie tangentă la o curbă anumită, se numeşte *ecuaţiunea tangenţială* a acelei curbe.

Atât pentru studiul în sine al curbelor, sub îndoitul aspect arătat mai sus, cât şi pentru avantagiul pe care-l poate prezenta în aplicaţiuni, — este util cred să se prezinte paralel cu coordonatele punctuale şi coordonatele tangenţiale.

Să trecem în acest scop în revistă câteva chestiuni simple.

2. *Punctul*. Un punct oarecare se defineşte în raport cu două axe Ox, Oy, prin două numere x, y, numite coordonatele punctului. Un punct mai poate fi însă considerat drept curba cea mai simplă, prin urmare fiecare punct va avea ecuaţiunea sa tangenţială.

Să găsim, spre exemplu ecuaţiunea tangenţială a originii axelor de coordonate; vom exprima în acest scop că o *dreaptă oarecare*.

$$u x + v y + w = 0$$

este tangentă la această curbă particulară, adică trece prin origină; obţinem

$$w = 0$$

care este ecuaţiunea tangenţială a originii.

In general ecuaţiunea tangenţială a unui punct de coordonate (a, b) este

$$a u + b v + w = 0.$$

3. *Dreapta*. Definind dreapta ca generând prin mişcarea unui punct, ea are o *ecuaţiune punctuală*, de forma

$$u x + v y + w = 0.$$

In coordonate tangenţiale, dreapta este elementul fundamental, după cum este punctul în coordonate punctuale şi îi corespunde după cum am arătat trei cantităţi (U, V, W) zise coordonatele dreptei şi definite de relaţiunile

$$\frac{U}{u} = \frac{V}{v} = \frac{W}{w}$$

care sunt de fapt ecuaţiunile tangenţiale ale dreptei.

Spre exemplu, axele Ox, Oy au ca ecuațiuni punctuale, respectiv $y=0$, $x=0$, iar coordonatele lor tangențiale sunt

$u=0,\ v=1,\ w=0)$ și $(u=1,\ v=0,\ w=0)$ *).

4). *Cercul.* Fie un cerc cu centrul în origină; ecuațiunea sa punctuală este de forma:

(1) $$x^2+y^2-r^2=0;$$

pentru a găsi ecuațiunea sa tangențială trebue să exprimăm că o dreaptă oarecare

(2) $$ux+vy+w=0$$

este tangentă la cerc; ecuațiunea (2) se poate scrie și astfel

$$y=-\frac{u}{v}x-\frac{w}{v}$$

și punând

$$m=-\frac{u}{v},\quad n=-\frac{w}{v}$$

condițiunea căutată se știe că este

(3) $$n^2=r^2(1+m^2)$$

sau

(4) $$w^2=r^2(u^2+v^2)$$

care este ecuațiunea tangențială a cercului (1).

In cazul când r tinde spre zero, ecuațiunea (1) se reduce la

$$x^2+y^2=(y+ix)(y-ix)=0$$

adică la două drepte imaginare **)

$$y=ix,\quad y=-ix$$

care se întretaie într'un punct real, origina.

Ecuațiunea tangențială a acestui cerc particular se obține făcând în ecuațiunea (4), $r=0$; găsim

(6) $$w^2=0$$

adică origina socotită dublu.

*) Se înțelege însă că coordonatele de mai sus sunt cele mai simple; orice cantități proporționale cu (0, 1, 0) și (1, 0, 0) pot fi privite ca coordonatele respectiv ale lui Ox și Oy.

**) In cazul când coeficientul unghiular al unei drepte imaginare este egal cu $+i$ sau $-i$ dreapta se numește și *isotropă*.

Prin urmare, din punct de vedere *punctual* un cerc de rază nulă se reduce la isotropele centrului lui, iar din punct de vedere *tangențial* cercul se reduce la centrul lui, socoit ca provenind din două puncte confundate.

5. *Elipsa și Iperbola.* Ecuațiunile punctuale a acestor curbe sunt:

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon' a^2+\varepsilon c^2}=1$$ *)

în care $\varepsilon'=+1$, $\varepsilon=-1$ pentru elipsă și $\varepsilon'=-1$. $\varepsilon=1$ pentru iperbolă,

Dreapta

$$y=mx+n$$

este tangentă la curba (1) dacă

$$n^2=a^2m^2-\varepsilon(\varepsilon' a^2+\varepsilon c^2)$$

sau utilizând coordonatele $(u,\ v,\ w)$:

(2) $$w^2=a^2u^2-\varepsilon(\varepsilon' a^2+\varepsilon c^2)v^2$$

care este ecuațiunea tangențială a elipsei

$(\varepsilon'=1, \varepsilon=-1)$ sau a iperbolei $(\varepsilon'=-1, \varepsilon=+1)$

Dacă semiaxa a variază și tinde către semidistanța focală c, ecuațiunea (1) devine

$$y^2=0$$

adică conica se reduce la segmentul din axa $x'x$, (socotit dublu) cuprins între focarele conicei, pentru cazul elipsei și la porțiunile din această axă exterioare focarelor pentru cazul iperbolei,

In aceiași ipoteză de mai sus, ecuațiunea (3) devine

$$w^2-c^2u^2=(w+cu)(w-cu)=0$$

sau

$$w+cu=0 \text{ și } w-cu=0$$

care sunt respectiv ecuațiunile tangențiale ale focarelor.

Prin urmare din punct de vedere *tangențial*, conica se reduce la focarele ei.

**) Axele de coordonate sunt axele de simetrie ale curbei.

6. *Parabola*, are ca ecuațiune punctuală:

(1) $$y^2 = 2px \text{ *)}$$

Condițiunea ca dreapta

$$y = mx + n$$

să fie tangentă la parabolă se știe că este

(2) $$n = \frac{p}{2m}$$

sau în coordonate tangențiale

(3) $$pv^2 = 2uw.$$

Dacă parametrul p tinde spre zero, ecuațiunea (1) devine

$$y^2 = 0$$

iar ecuațiunea (3)

$$uw = 0$$

sau

$$u = 0, \quad w = 0;$$

prin urmare din punct de vedere *punctual*, parabola (1) se reduce la semiaxa pozitivă Ox, iar din punct de vedere *tangențial* la vârful parabolei ($w = 0$) și la punctul dela infinit de pe axa ei de simetrie ($u = 0$).

7. Din exemplele de mai sus, reiese că fără a adăoga nimic la chestiunile ce se tratează obicinuit în manualele elementare de geometrie analitică, avem posibilitatea să studiem curbele dintr'un punct de vedere mai compleçt. *punctual* și *tangențial*.

Introducând numai definițiunea coordonatelor unei drepte și aceia a ecuațiunei tangențiale a unei curbe, putem pune în valoare o sumă de rezultate, precum sunt condițiunile de tangență (3).4, (2).5, (2).6, care sunt de fapt ecuațiunile tangențiale ale cercului, elipsei sau iperbolei și parabolei.

Intr'un număr viitor voi expune câteva aplicațiuni a coordonatelor punctuale și tangențiale.

*) Am raportat parabola la axa ei de simetrie și tangenta la vârf.

NOTE MATEMATICE

Rezolvarea ecuației de gradul al patrulea.

Ecuația de gradul al patrulea:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

poate fi redusă la forma:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

prin substituția: $x = y - \frac{a}{4}$

Rădăcinile ecuației (1) sunt cu $\frac{a}{4}$ mai mici de cât ale ecuației (2). Rămâne dar să rezolvăm ecuația (2). Sunt cunoscute mai multe metode. Imi permit să expun aci una tot așa de simplă ca și cele cunoscute.

Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației (2). Intre ele există relația $\Sigma x_1 = 0$.

Așa fiind, putem determina cantitățile α, β, γ așa ca să avem:

$$\alpha + i\beta = x_1, \quad \alpha - i\beta = x_2,$$
$$-\alpha + i\gamma = x_3, \quad -\alpha - i\gamma = x_4,$$

oricum ar fi rădăcinile ecuației. In adevăr, din primele două relații determinăm pe α și β (reali sau imaginari), din a treia deducem pe γ; iar a patra relație este consecința primelor trei.

Pentru a rezolva ecuația va fi dar destul a afla pe α, β și γ.

Scriem relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (2):

$$\Sigma x_1 x_2 = p \quad \therefore \quad \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2 = p$$

$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = -q \quad \therefore \quad 2\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = q$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = r \quad \therefore \quad (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2) = r.$$

Din primele două ecuații deducem:

(3) $$\begin{cases} \beta^2 + \gamma^2 = p + 2\alpha^2 \\ \beta^2 - \gamma^2 = \frac{q}{2\alpha} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{matrix} \beta^2 = \frac{p}{2} + \alpha^2 + \frac{q}{4\alpha} \\ \gamma^2 = \frac{p}{2} + \alpha^2 - \frac{q}{4\alpha} \end{matrix}$$

Aceste valori introduse în a treia relație dă rezolvanta:

$$\left(2\alpha^2+\frac{p}{2}+\frac{q}{4\alpha}\right)\left(2\alpha^2+\frac{p}{2}-\frac{q}{4\alpha}\right)=r$$

$$\therefore\ 64\alpha^6+32p\alpha^4+4(p^2-4r)\alpha^2-q^2=0.$$

Punând $\alpha^2=\frac{z}{4}$, ecuația devine:

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$$

și recăpătăm, astfel, ecuația rezolvantă a lui Descartes.

E destul a găsi o singură rădăcină a acestei ecuații, din ea se va deduce o valoare pentru α și cu ajutorul ei se va determina un sistem de valori β, γ, din (3).

Observare. S'ar mai putea rezolva ecuația punând

$$x_1=u+v,\ x_2=u-v,\ x_3=-u+w,\ x_4=-u-w$$

E. CARAMAN

Asupra lunulelor lui Hipocrate. Această proprietate găsită de Hipocrate se enunță astfel: Suma ariilor cuprinse între semicercurile descrise pe cele 2 catete ale unui triunghiu dreptunghiu și semicercul descris pe ipotenuză este egală cu suprafața triunghiului. Îmi propun să generalizez chestiunea, și anume să găsesc expresia sumei ariilor cuprinse între semicercurile descrise în exterior pe cele trei laturi ale unui triunghiu oarecare și cercul circumscris triunghiului.

Însemnând cu a, b, c laturile triunghiului, suma celor trei semicercuri va fi: $\frac{\pi}{8}(a^2+b^2+c^2)$, iar aria cercului circumscris:

$$\pi\frac{a^2b^2c^2}{16s^2}$$

Expresia căutată va fi:

$$E=\frac{\pi}{8}(a^2+b^2+c^2)-\left[\pi\frac{a^2b^2c^2}{16s^2}-s\right]$$

sau:

$$E=\frac{\pi}{8}\left[a^2+b^2+c^2-\frac{a^2b^2c^2}{2s^2}\right]+s$$

Când triunghiul devine dreptunghic, atunci expresiunea din paranteză se anulează iar suma ariilor căutate devine egală cu suprafața s a triunghiului.

OCTAV ULMAN

BIBLIOGRAFIE

Buletinul asociației de matematici pure și aplicate. Anul II, No. 4, Decembrie 1922, București. Observări asupra criteriilor de convergență de *Th. Angheluță*. Asupra funcțiunilor întregi de *P. Sergescu*.

Gazeta Matematică. Anul XXVIII, No. 4, Decembrie 1922. Munca matematică de *I. Ionescu*. Comparațiune între suma divizorilor unui număr și suma numerilor prime lui și inferioare dânsului de *Lt. I. Linteș*.

Note Matematice și științifice, seria I, No. 6, Decembrie 1922, Craiova. Rezolvarea *ecuațiilor* de forma $ax+by=c$.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Date la o lucrare scrisă

ȘCOALA MILITARA DE ARTILERIE

Anul I

O baterie ocupă poziție pe front. Comandantul bateriei ordonă celor doi comandanți de secții, să facă câte un adăpost de muniții, de formă cubică, pentru fiecare secție, în care să intre câte 1000 proectile.

1) Admițând că pe metru cub intră 120 proectile, se cere latura adăpostului.

2) Admițând însă că în timpul socotelelor, comandantul secției I-a greșește la calcule și obține o latură cu 10% mai mică ca latura adevărată, câte proectile va încăpea deci — în adăpostul secției I-a?

3) După o lună, bateria se schimbă, luându-i locul o altă baterie. Comandantul bateriei care a venit acum, ordonă sa se mărească adăposturile de muniții a celor două secții, astfel încât să încapă de trei ori mai multă muniție, păstrându-se însă tot forma cubică. Cu cât va trebui cei doi comandanți de secții să-și adâncească, lărgească și lungească adăposturile?

I). Un călător merge cu trenul la București, urcându-se din Timișoara.

După câtăva vreme, întreabă pe un prieten:

— Cât mai avem până la București?

— $^{15}/_{4}$ din distanța pe care am parcurs-o, îi răspunde

prietenul. Dupăce s'a gândit mai multă vreme, călătorul îl întreabă iar pe prieten:

— Dar ce distanță am parcurs?

— $^{13}/_{3}$ din ceiace mai avem până la București, îi răspunde prietenul.

Se cere punctele unde au avut loc aceste două dialoguri, admițând că distanța Timișoara-București este de 550 km.

LT. I. I INTES

PROBLEME REZOLVATE

129. — *Să se indice toate operațiunile grafice, în ordinea lor succesivă, care trebuesc făcute, pentru a construi pe hârtie, numai cu rigla și compasul, (fără echer) un triunghiu care să aibă înălțimea astfel încât lungimea ei să fie de 2 ori mai mare ca segmentul cel mai mare, pe care piciorul ei îl determină pe lungimea dată a bazei, să fie așa că diferența patratelor lor să fie egală cu patratul unei drepte date.*

M. VASILIU

I. Soluție dată de d-l *E. Iliescu* (lic. Mânăstirea Dealului).

Presupun problema rezolvată. Fie A B C triunghiul căutat și C D înălțimea sa. Acest triunghiu trebue să îndeplinească condițiile

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = l^2,\ AB = m,\ DC = 2AD$$

în care l și m sunt două lungimi date.

Prima relație arată că B D este o catetă într'un triunghiu dreptunghic D B E în care cealaltă catetă B E este egală cu l iar ipotenuza D E este egală cu D A. Pe această observație se bazează rezolvarea problemei și toate construcțiile care urmează în ordinea lor succesivă așa cum se cere în enunț.

Cu *compasul* iau lungimea m și așez punctele A și B pe foaia de hârtie.

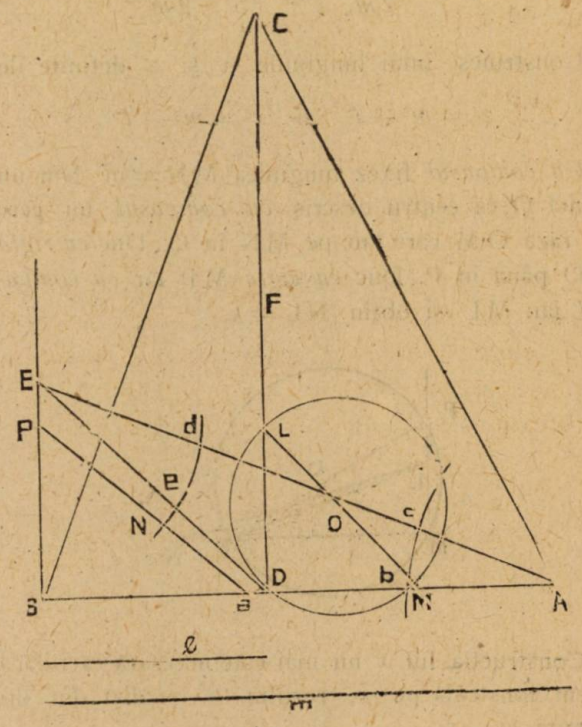
Cu *compasul* descriu un cerc cu centrul într'un punct oarecare N și cu raza N B. Acest cerc taie pe A B în a.

Cu rigla duc aN până taie cercul în P.

Cu rigla duc B P. *Cu compasul* descriu un cerc cu centrul B și cu raza B E egală cu l.

Cu rigla duc A E.

Cu compasul descriu un cerc oarecare cu centrul în A care taie pe A B și A E în b și c. Apoi *tot cu compasul* descriu un cerc egal cu precedentul și cu centrul în E.



Cu compasul iau $d\,e$ egal cu $c\,b$ (d se află pe A B iar $d\,e$ se ia de aceiași parte cu A B).

Cu rigla duc Ee care taie pe A B în D. Acesta este piciorul înălțimei căci

$$\overline{DE}^2 = \overline{DA}^2 = \overline{BD}^2 + l^2.$$

Cu compasul descriu un cerc cu centrul în un punct O și cu raza O D care taie pe A B în M.

Cu rigla duc M O până taie pe O în L apoi *tot cu rigla* duc D L.

Cu compasul iau D F = A D și tot *cu compasul* iau F C = A D.

Cu rigla duc C A și apoi C B. Triunghiul A B C este astfel construit.

II. Soluție dată de d-nii: *Atanasiu D-tru* (M-rea Dealul) *Ovidiu Popea* (lic. Chișinău), *Leon Weis* (lic. Alexandri Galați), C. *Răuț* (lic. mililar M-rea Dealul).

Fie p și n segmentele determinate de înălțimea

I pe baza AB. Conform enunțului avem:

$$p^2 - n^2 = l^2\ ;\ p + n = m\ ;\ l = 2p.$$

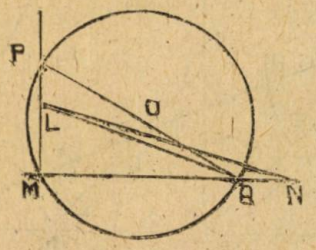
Primele 2 relațiuni dau

$$p = \frac{m^2 + l^2}{2m} \quad \text{și} \quad n = \frac{m^2 - l^2}{2m}$$

Construesc întâi lungimile x și z definite de

$$z^2 = m^2 + l^2 \quad \text{și} \quad x^2 = m^2 - l^2$$

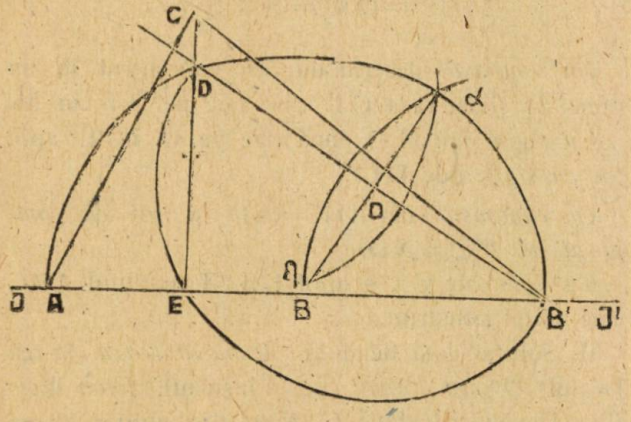
Cu compasul fixez lungimea MN = m. Din un punct O ca centru descris *cu compasul* un cerc cu raza OM care taie pe MN în Q. Duc *cu rigla* QO până în P. Duc *cu rigla* MP iar *cu compasul* iau ML și obțin NL = z.



Construcția lui x nu mai este necesară căci dacă avem construis pe p, rezultă n imediat din diferența $m - p$.

O dată z determinat problema se continuă astfel.

Cu compasul luăm AB = m și apoi BB′ = m și o linie $y\,y'$ trasată mai întâi *cu rigla*. Din B ca centru descriu *cu compasul* un cerc de diametru AB′. Din A ca centru descriu cu compasul un cerc de rază



z care taie pe primul în D. Din D și B′ descriu *cu compasul* 2 cercuri egale care se taie în α și β. Duc *cu rigla* $\alpha\beta$ și determin mijlocul O a lui DB′. Descriu *cu compasul* cercul cu centrul în O și raza OD care taie pe AB în E. In triunghiul dreptunghic ADB′ avem

$$\overline{AD}^2 = AE \cdot AB' = 2m \cdot AE$$

deci AE = p și urmează că EB = n.

Ca la prima soluție ridic în E o perpendiculară pe AB pe care iau EC egal cu dublul celei mai mari din lungimile AE și BE. Triunghiul ABC este cel căutat.

Observațiuni. 1°. Au rezolvit problema întrebuințând calea dela soluția I, dar fără a indica *toate* operațiunile grafice, așa cum se cere în enunț, d-nii: *V. Cristescu* Pitești, *M. Bogdan* lic. din Caracal, *D. Măru* lic. Alexandri Galați, *I. M. Focșeneanu* lic. militar M-rea Dealul, *V. Ghițescu* lic. Mihai Viteazul București, *I. G. Silion* lic. din Câmpina și *Pavel Dumitrescu* student Pitești.

2°. D-l *Fl. Negretzu* lic. Pitești a dat o soluție, puțin diferită de II, indicând toate construcțiile.

3°. Au rezolvit problema ca la soluția II, fără a indica construcțiile, d-nii: *O. Ulman M. Bobârnac* Șc. Politecnică din Timișoara, *F. Georgescu* lic. Cantemir București, *C. Berdan* lic. din Bârlad, *M. Cocorandu* lic. din Brașov, *T. Melhmann* lic. Dragoș Vodă, Câmpulung Bucovina și *A. Bușilă*.

4°. D-l *I. Coșereanu* Șc. Politecnică din Timișoara, a rezolvit problema făcând uz de construcții de elipse.

5°. Au dat diferite soluțiuni, fără a indica *toate* construcțiile grafice, d-nii: *Brătescu-Râmnic*, *C. Goilav* student Tecuci, *A. Școdreanu* Durostor Silistra, *T. Popoviciu* lic. „Moise Nicoară" Arad, *Pîncu Katz* lic. „Comunității Israelite" Galați, *D. Pantazi*, *M. Grünfeld* lic. „Bălcescu" Brăila, *A. Miclescu* Șc. Militară de Artilerie Timișoara, *Solomon Wilhelm* lic. „Matei Basarab" București, *I. Boncu* lic. militar M-rea Dealul și *E. Scoruşeanu* București

6°. D-l *F. Georgescu* a arătat că în mod analog se poate rezolvi problema dacă s'ar fi dat o bisectoare, unghiul pe care-l face cu baza și segmentele ce determină pe bază.

7°. A fost și o soluție nesemnată, necomplectă de altfel

136. — *Să se arate că dacă avem:*

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = (xy + yz + zx - 1)^2$$

atunci vom avea și

$$(x + y + z - xyz)^2 = 0$$

LOCOT. COL. GH BUICLIU

Desvoltând calculele în relația dată și trecând totul în membrul întâi putem scrie succesiv:

$$1+x^2+y^2+x^2y^2+z^2+x^2z^2+y^2z^2+x^2y^2z^2-$$
$$x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2-1+2xy^2z+2x^2yx-$$
$$2xy+2xyz^2-2yz-2xz=x^2+y^2+z^2+$$
$$x^2y^2z^2-2xyz(x+y+z)-2xy-2yz-$$
$$2xz=(x+y+z)^2-2xyz(x+y+z)+x^2y^2z^2$$
$$=(x+y+z-xyz)^2=0$$

și astfel avem relația cerută.

Observare. D-l *Georgescu Er. Florian*, stabilește că dacă între razele cercurilor exînscrise unui triunghiu există relațiunea:

$$(1+r_a^2)(1+r_b^2)(1+r_c^2)=(r_a+r_b+r_c-r_a r_b r_c)$$

perimetrul acelui triunghiu este constant.

Se înlocuește x, y, z în relațiunile dată și cea stabilită respectiv prin $\frac{1}{r_a}$, $\frac{1}{r_b}$, $\frac{1}{r_c}$.

Soluțiuni bune date de d-nii: *Alexandrescu M.* liceul Constanța, *Amărăscu O. Gavril*, *Arcadian P. Nicu* Caracal, *Asnaș I. S.* Călărași, *Atanasiu D-tru* Huși, *Bălescu I. Cr.* Craiova, *Beldie N. D-tru* R.-Sărat, *Berdan I. C-tin* Bârlad, *Beșliu C.* Timișoara, *Brătășanu Al. G.*, *Bogdan M.* Caracal, *Blumenfeld D.* Botoșani, *Bobârnac Mircea*, *Branover I.* Timișoara, *Brăileanu Al.* Constanța, *Brătescu Mihai*, *Bușilă A. Adrian* București, *Căpitan H. Corneliu* Arad, *Ciolacu St. Miron* Caracal, *Cocorandu M.* Brașov, *Constantinescu Ion* M-rea Dealul, *Constantinescu M.* București, *Coșereanu I.* Timișoara, *Crăinicescu Eugen* Timișoara, *Dan V.* Galați, *Dimitriu Adrian* M-rea Dealul, *Dobrescu M. Filip* Caracal, *Dordea A. Traian*, *Dragomirescu Busue Eduard* Timișoara, *Dragomir N. Ioan* București, *Dumitrescu G. Marin* Craiova, *Focșeneanu I. M.* M-rea Dealul, *Gabrielescu Vasile* Brăila, *Georgescu C-tin* București, *Georgescu Florian* București, *Georgescu Gorjan* Craiova, *Georgescu C. Ioan* Pitești, *I. N. Georgescu-Val* Călărași, *Ghițescu Virgil* București, *Gogălniceanu M. Mihai* Brăila, *Goilav P. Cristea* Tecuci, *Gropșorean George* Arad, *Grümberg S. H.* Galați, *Grünfeld M.* Brăila, *Harth Er.* Câmpulung Bucovina, *Iliescu E.* M-rea Dealul, *Ionescu T. Carol* București, *Ionescu I. Ilie* Caracal, *Ionescu B. Ioan* Pitești, *Ionescu S. Leongin* Caracal, *Ioniță M. Ioan* Timișoara, *Iordache N. Ioan* Curtea de Argeș, *Klein S.* Galați, *Lăzărescu Th. Jean* Pitești, *Lăzărescu F. St.* Giurgiu, *Marin D. Trincă* Caracal, *Mateescu Gh.* Galați, *Măru D-tru* Galați, *Mehlmann Theodor* Câmpulung Bucovina, *Miclescu Andrei* Timișoara, *Mihăescu D. C-tin* Giurgiu, *Mircea I. Adam* Constanța, *Mircea Aurică* M-rea Dealul, *Mitran St. Gr.* Craiova, *Mocanu N. Aurel* Huși, *Mucichescu D. N.* Craiova, *Murariu Petru* Lugoj, *Negreu Petru* Arad, *Negretzu Florea* Pitești, *Neștianu Gh. Gh.* M-rea Dealul, *Niculescu Alexandru* București, *Niculescu Valeriu* București, *Oprișeanu Ernest* Bârlad, *Pamula Alexandru* Botoșani, *Panait Ion* Galați, *Pârâianu Nicu* Constanța, *Pâșlea Viorică* Câmpulung Bucovina, *Pincu Katz* Galați, *Pinchis A. M.*, *Popa I. Theodor* București, *Popea Gh. Ovidiu* Kișinău, *Popescu N. N.* Câmpina, *Popovici Th. Ioan*, *Popovici Chr. Ioan* Galați, *Popoviciu Tiberiu* Arad, *Propst A. J.*, T.-Severin, *Ristea N. Marin* Caracal, *Rosețel Bojiu* Silistra, *Runcan V.* M-rea Dealul, *Samoilă D-tru* Câmpina, *Samovici I.* Focșani, *Școdrano A.* Durostor, *Schönfeld Conrad* Botoșani, *Silion Gh. Ion* Câmpina, *Solomon Nicu* Timișoara, *Solomon W.* București, *Stănciulescu A. Gheorghe* Pitești, *Ștefănescu Emil* București, *Stoenescu I.* București, *Tauber Alexandru* Botoșani, *Theodoru Nicuță* Huși, *Teodorescu St. I.* Ploești, *Tinea N. Ion*, *Urzică A.*, *Ulman Octav* Timișoara, *Vasilescu I. D.* Iași, *Weiss Leon* Galați și *Weissler Doru* Câmpina.

138. —*Să se demonstreze că în orice triunghiu există relațiunile:*

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos A}{h_a}+\frac{\cos B}{h_b}+\frac{\cos C}{h_c}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{\cos A}{r_a}+\frac{\cos B}{r_b}+\frac{\cos C}{r_c}$$

notațiunile fiind cele obicinuite.

LOCOT. GRIGORE ZAPAN.

Soluție dată de d-nii: *Iliescu Emilian* lic. M-rea Dealu și *Niculescu Alexandru* lic. Sf. Sava București.

Dacă într'un triunghiu ABC unim centrul O al cercului circumscris cu vârfurile sale, obținem trei triunghiuri ale căror înălțimi duse din O, sunt:

$$R\cos A,\quad R\cos B,\quad R\cos C$$

Aria s a triunghiului ABC este atunci:

$$s=\frac{R}{2}(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$

$$\therefore (1)\quad \frac{1}{R}=\frac{a}{2s}\cos A+\frac{b}{2s}\cos B+\frac{c}{2s}\cos C$$

Dar știm că,

$$a\,.\,h_a=b\,.\,h_b=c\,.\,h_c=2s$$

de unde,

$$\frac{a}{2s}=\frac{1}{h_a},\quad \frac{b}{2s}=\frac{1}{h_b},\quad \frac{c}{2s}=\frac{1}{h_c}$$

Relațiunea (1) devine atunci:

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos A}{h_a}+\frac{\cos B}{h_b}+\frac{\cos C}{h_c}$$

Prima relațiune dată este stabilită.

Acum să stabilim a doua relație. Notând cu E membrul al 2-lea al acestei relațiuni și înlocuind pe $\frac{1}{R}$ cu valoarea sa din prima relație, avem:

$$(2)\quad E = \cos A\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{h_a}\right)+\cos B\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{h_b}\right)+\cos C\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{h_c}\right)$$

Cum, $\quad h_a=\frac{2s}{a},\ h_b=\frac{2s}{b},\ h_c=\frac{2s}{c},$

$$r_a=\frac{s}{p-a},\ r_b=\frac{s}{p-b},\ r_c=\frac{s}{p-c},\ r=\frac{s}{p}$$

relația (2) devine:

$$E=\cos A\,\frac{b+c}{2s}+\cos B\,\frac{a+c}{2s}+\cos C\,\frac{a+b}{2s}=$$

$$\frac{1}{2s}\left[(b+c)\cos A+(a+c)\cos B+(a+b)\cos C\right]$$

$$=\frac{p}{s}=\frac{1}{r}$$

fiindcă,

$$(b+c)\cos A+(a+c)\cos B+(a+b)\cos C=2p$$

(Culegere de Probleme, Trigonometria, XVIII, 3),

Astfel și relația a 2-a este stabilită.

Soluție dată de d-nii: *Bușilă A. Adrian*, *Coșereanu I.*, Șc. Politecnică Timișoara, *I. N. Georgescu-Val*, *Tauber Alexandru* și *Oprișeanu Ernest* lic. Bârlad.

Plecăm dela relațiunea cunoscută:

$$(3)\quad \frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2,$$

și ținând seamă că,

$$\sin B\sin C=\frac{h_a}{2R},\ \sin A\sin C=\frac{h_b}{2R},\ \sin A\sin B=\frac{h_c}{2R}$$

relația (3) devine după oarecare simplificări.

$$\frac{\cos A}{h_a}+\frac{\cos B}{h_b}+\frac{\cos C}{h_c}=\frac{1}{R}$$

Prima relație este astfel stabilită.

A doua relație dată; ținând seamă de prima se poate scrie:

$$(4)\quad \frac{1}{r}=\sum\cos A\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{r_a}\right)$$

Însă,

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

și relația (4) devine:

$$\frac{1}{r}=\sum\cos A\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

care constitue enunțul problemei No. 41 rezolvată în „R. M. T.", An. I, pag. 134.

Soluție dată de d-nii: *Georgescu Fl.* lic. Cantemir București, *Georgescu-Roegen* lic. M-rea Dealu, *Ioniță M. Ioan* Șc. de Artilerie, *Pârâianu* V. Șc. Navală.

1°. Se cunoaște relația

$$\frac{2s}{R}=a\cos A+b\cos B+c\cos C$$

$$\therefore\quad \frac{1}{R}=\frac{\cos A}{h_a}+\frac{\cos B}{h_b}+\frac{\cos C}{h_c}$$

ceiace stabilește prima relație.

2°. Pornesc dela relația cunoscută

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}$$

$$\therefore\quad \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{p\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{p\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}}=\frac{1}{R}$$

Dar,

$$p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}=r_a,\ p\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}=r_b,\ p\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}=r_c$$

și atunci mai putem scrie:

$$\frac{1-\cos A}{r_a}+\frac{1-\cos B}{r_b}+\frac{1-\cos C}{r_c}=\frac{1}{R}$$

Scăzând această relație din:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

deducem

$$\frac{\cos A}{r_a}+\frac{\cos B}{r_b}+\frac{\cos C}{r_c}+\frac{1}{R}=\frac{1}{r}$$

Relația a 2-a este astfel stabilită.

Soluțiuni bune date de d-nii: *Bușilă Adrian* lic. Mihai-Viteazul București, *Lăzărescu Fl. Ștefan* lic. Giurgiu și *Stoenescu Al. I.* lic. Cantemir București.

Se ajunge la relațiile de stabilit, pornind dela relațiuni cunoscute.

$$a^2\operatorname{cotg}A+b^2\operatorname{cotg}B+c^2\operatorname{cotg}C=4s$$

$$(b+c)\cos A+(a+c)\cos B+(a+b)\cos C=2p$$

Alte soluții date de d-nii: *Berdan C.* lic. Bârlad, *Brăileanu Alex.* lic. Constanța, *Mocanu N. A.* lic. Huși, *Georgescu C. Ioan* lic. Pitești, *Klein S., Dili Schileru, Silion Gh. Ion* lic. Câmpina și *Vasiliu I. D.* lic. Internat Iași.

Au verificat relațiunile date, fără a le stabili, d-nii: *Bălescu I. Cristian* lic. Craiova, *Bercovici A., Bobârnac Mircea, Brătescu M.* R.-Vâlcea, *Cocorandu M* Brașov, *Constantinescu I.* lic. M-rea Dealu, *Cristian I. B., Dan V.* Galați, *Dobrescu-Băbici, Ionescu I. Ilie, Ionescu S. Longin* lic. Caracal, *Dragomir I.* lic. Cantemir București, *Goilav Cristea* Tecuci, *Ionescu B. Ioan, Iordăchescu N. N.* lic. Pitești, *Ionică Eugen* Brașov. *Mateescu Gh., Popovici Chr., Pincu Katz* lic. Galați, *Miclescu Andrei* Șc. de Artilerie, *Popovici Tiberiu* lic. Arad, *Propst A. J.* lic. T.-Severin, *Rigani Cr., Rizescu I., Scodreanu A.* Durostor, *Șerbănescu Ioan* lic. Mihai-Viteazul București, *Stănescu A. Nicolau, Ștefănescu Emil* lic. Spiru-Haret București, *Teodoru Nicuță* lic. Huși, *Arcadiu Nicu, Mihăescu D. Dumitru* Giurgiu și *Stănciulescu A. Gheorghe* Pitești.

149. — *Se dă un triunghiu* ABC *dreptunghic în* A. *Se duce înălțimea* AA'. *Bisectoarele unghiurilor din* A' *taie laturile opuse în* U *și* V. *Bisectoarea interioară a unghiului* B *taie pe* A'V *în* D *iar bisectoarea exterioară în* E. *Să se arate că dreptele* DF *și* EG *sunt paralele iar dreptele* EF *și* DG *se taie pe mijlocul lui* UV.

T. Popovici.

I. Soluție dată de propunătorul problemei d-l *Tiberiu Popovici* lic. Moise Nicoară Arad.

Patrulaterul AUA'V având unghiurile din A și A' drepte este inscriptibil deci

$$\widehat{AVU}=\widehat{AA'U}=45^\circ \text{ și } \widehat{AUV}=\widehat{AA'V}=45^\circ$$

ceiace arată că unghiurile AVU și AUV sunt egale și că deci

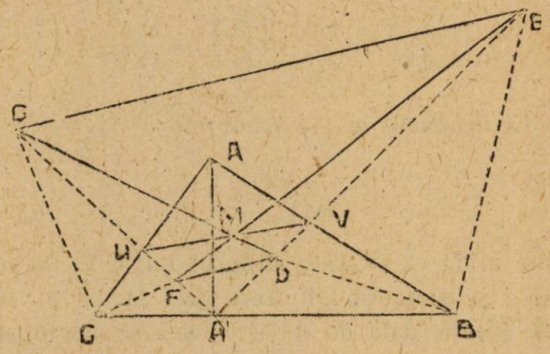
$$(1)\qquad AV=AU$$

Bisectoarea CF din triunghiul A'CU dă

$$(2)\qquad \frac{FA'}{FU}=\frac{CA'}{CU}$$

Bisectoarea BD din triunghiul A'BV dă

$$(3)\qquad \frac{DA'}{DV}=\frac{BA'}{BV}$$



Aplicând aceiași proprietate bisectoarelor A'U și A'V în triunghiurile AA'C și AA'B se găsește

$$(4)\quad \frac{CA'}{CU}=\frac{AA'}{AU} \text{ și } (5)\quad \frac{BA'}{BV}=\frac{AA'}{AV}$$

Comparând egalitățile (2), (3), (4), (5) și ținând seama de (1) se găsește

$$(6)\qquad \frac{FA'}{FU}=\frac{DA'}{DV}$$

care arată că DF și UV sunt paralele.

Bisectoarele exterioare BE și CG din triunghiurile BA'V și CA'U dau

$$\frac{EA'}{EV}=-\frac{BA'}{BV} \text{ și } \frac{GA'}{GU}=-\frac{CA'}{CU}$$

Comparând aceste relațiuni cu precedentele se găsește

$$\frac{EA'}{EV}=\frac{GA'}{GU}$$

care arată că EG este paralelă cu UV și deci cu DF.

Pentru a demonstra partea a doua să însemnăm cu M intersecția lui DG cu UV. Triunghiul A'UV tăiat de transversala DMG dă

$$(7) \qquad \frac{DA'}{DV}\cdot\frac{MV}{MU}\cdot\frac{GU}{GA'}=1$$

Dar bisectoarele CF și CG din triunghiul A'CU dau împreună cu paralelismul dreptelor DF și UV:

$$\frac{CA'}{UC}=\frac{FA'}{FU}=\frac{GA'}{GU}=\frac{DA'}{DV}$$

așa că înlocuind în (7) se obține

$$\frac{MV}{MU}=1$$

ceiace arată că M este mijlocul lui UV. In mod analog se arată că EF trece prin M.

II. Soluție dată de d-l *A. Școdrano* lic. Silistra.

Vom ține seamă de relațiunile stabilite de d-l *G. Nichifor* în articolul **Proprietăți în legătură cu un triunghiu dreptunghic,** publicat în *Revista Matematică din Timișoara,* Vol. I, pag. 117.

Dacă se înseamnă cu a, b, c laturile triunghiului ABC, atunci conform relațiunilor stabilite în articolul citat, avem:

$$A'B=\frac{c^2}{a};\quad A'C\frac{b^2}{a};\quad BV=\frac{c^2}{b+c};\quad CU=\frac{b^2}{b+c};$$

$$UV=\frac{bc\sqrt{2}}{b+c};\quad A'V=\frac{bc^2\sqrt{2}}{a(b+c)};\quad A'U=\frac{b^2c\sqrt{2}}{a(b+c)}$$

In triunghiul A'BV bisectoarea BD ne dă

$$\frac{VD}{A'D}=\frac{VB}{A'B}$$

De unde se deduce ușor

$$A'D=\frac{VD+A'D}{VB+A'B},\quad A'B=\frac{A'V\cdot A'B}{VB+A'B}$$

Inlocuind aici liniile prin valorile de mai sus, găsim:

$$A'D=\frac{bc^2\sqrt{2}}{a(a+b+c)}$$

In mod analog se găsește

$$A'F=\frac{b^2c\sqrt{2}}{a(a+b+c)};\quad A'E=\frac{bc^2\sqrt{2}}{a(b+c-a)};$$

$$A'G=\frac{b^2c\sqrt{2}}{a(b+c-a)}$$

Ultimele 4 relațiuni dau imediat

$$\frac{A'D}{A'E}=\frac{A'F}{A'G}$$

ceiace demonstrează prima parte a problemei.

Fie M mijlocul lui UV. Voi arăta că D, M, G sunt colineare, adică că față de triunghiul A'UV avem

$$(1) \qquad \frac{DV}{DA'}\cdot\frac{GA'}{GU}\cdot\frac{MU}{MV}=1$$

sau cum $MU=-MV$ va trebui să arăt că

$$(2) \qquad \frac{DV}{DA'}\cdot\frac{GA'}{GU}=-1$$

Se observă pe figură că

$$DV=A'V-A'D \quad \text{și} \quad GU=GA'-UA'$$

sau ținând seamă de relațiunile precedente

$$DV=\frac{bc^2\sqrt{2}}{a(b+c)}-\frac{bc^2\sqrt{2}}{a(a+b+c)}=$$

$$\frac{bc^2\sqrt{2}}{(b+c)(b+c+a)}$$

$$GU=\frac{b^2c\sqrt{2}}{a(b+c-a)}-\frac{b^2c\sqrt{2}}{a(b+c)}=$$

$$\frac{b^2c\sqrt{2}}{(b+c)(b+c-a)}$$

Inlocuind în (2) aceste valori precum și pe DA' și GA' găsit mai sus, obținem o identitate. Deci D, M, G sunt colineare. In mod analog se arată că F, M, E sunt colineare.

Observațiuni. 1°. D-l *I. M. Nicolau* lic. I. C. Brătianu a rezolvat complect problema întrebuințând polarele pentru partea a doua. D-sa enunță încă următoarele proprietăți a) *Punctul* M *este centrul cercului circumscris patrulaterului* VAUA' b) *Punctul* M, A *și intersecția drep-*

telor V G, U E *sunt colineare.* c) *Perechile de drepte* (C G, B E), (C F, B D), (C A, B A) *se întâlnesc în puncte colineare.*

2. D-l *I. Coşereanu* Şc. Politecnică Timişoara, a demonstrat numai prima parte pe o cale analoagă cu soluţia d-lui *T. Popoviciu.* Pentru partea a doua d-sa demonstrează cu dacă D G şi F E întâlnesc pe U V în I şi K atunci avem

$$\frac{DF}{KV} = \frac{DF}{IV}$$

De unde se deduce K V = I V şi deci „K *se confundă cu* I. *iar punctul* (K, I) *se află în mijlocul lui* U V".

3⁰. A mai rezolvat problema complect d-l *D. Măru* lic. Galaţi.

4⁰. S'au mai primit la această problemă 3 soluţiuni. Nu menţionăm numele acestor 3 rezolvitori pentrucă soluţiile d-lor au vicii de demonstraţii. Şi anume : *Prima* enunţă, fără nici o demonstraţie, că triunghiurile G A' E şi F A' D *fiind asemenea* urmează, etc. *A doua: Ridicăm în* F *o perpendiculară pe* D F *care taie pe* E G *în* N. *In patrulaterul* C G N F *avem*

$$\hat{N} + \hat{C} = 180^0$$

Cum C = 90⁰ *urmează* $\hat{N} = 90^0$, etc. Această demonstraţie sau e un paradox sau rezolvitorul ei crede că suma a 2 unghiuri opuse într'un patrulater oarecare este egală cu 180⁰. In fine a treia soluţie, aruncată la coş, începe „*Să luăm un caz particular şi anume când triunghiul* A B C *este isoscel. In cazul acesta etc.*". Dar nici acest caz particular n'a reuşit să fie rezolvat.

Am citat aceste exemple numai pentru a convinge pe corespondenţi, o dată mai mult că înainte de a redija o problemă este bine să-şi revadă soluţiunea de mai multe ori.

G. B.

179. — *Să se stabilească identitatea :*

$$6\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k^2-1)(k^2-4)} = \frac{5}{24} - \frac{2n+1}{n(n^2-1)(n+2)}$$

V. ALACI

Soluţie dată de d-nii : *Dobrescu-Băbiciu* lic. Caracal şi *I. N. Georgescu-Val* Şc. de Artilerie Timişoara.

Dacă în identitatea, (A se vedea articolul din „R. M. T." an. II No. 7).

$$\sum_{k=3}^{n}[f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(3)$$

luăm,

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-2)(x-1)x(x+1)}$$

obţinem :

$$\sum_{k=3}^{n}\left[\frac{2k+1}{(k-1)k(k+1)k+2)} - \frac{2k-1}{(k-2)(k-1)k(k+1)}\right] = \frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)} - \frac{5}{24}$$

$$**\ \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k^2-1)}\left(\frac{2k+1}{k+2} - \frac{2k-1}{k-2}\right) = \frac{2n+1}{n(n^2-1)(n+2)} - \frac{5}{24}$$

$$**\ 6\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k^2-1)(k^2-4)} = \frac{5}{24} - \frac{2n+1}{n(n^2-1)(n+2)}$$

şi identitatea dată este astfel stabilită.

A doua soluţiune. Descompunând în fracţiuni simple termenul general al sumei din primul membru, punem :

$$\frac{6}{(k^2-1)(k^2-4)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k-1} + \frac{C}{k+2} + \frac{D}{k-2}$$

$$6 = A(k-1)(k^2-4) + B(k+1)(k^2-4) + C(k^2-1)(k-2) + D(k^2-1)(k+2)$$

Pentru $k = -1$, găsim $A = 1$; pentru $k = 1$, $B = -1$; pentru $k = -2$, $C = -\frac{1}{2}$; pentru $k = 2$, $D = \frac{1}{2}$. Atunci :

$$\frac{6}{(k^2-1)(k^2-4)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-2}\right)$$

Dând lui k valorile 3, 4, ... n, şi adunând, obţinem :

$$6\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k^2-1)(k^2-4)} = \left(\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-1}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-4}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{k=7}^{n}\frac{1}{k-2}\right)$$

Cum,

$$\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-1},\quad \sum_{k=3}^{n-4}\frac{1}{k+2}=\sum_{n=7}^{n-4}\frac{1}{k-2}$$

rezultă după oarecare simplificări:

$$6\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k^2-1)(k^2-4)}=\frac{5}{24}-\frac{2n+1}{n(n^2-1)(n+2)}$$

adică tocmai identitatea dată.

Soluțiuni analoage ceva mai mai lungi date de d-nii: *Cocorandu M.* Brașov, *Cojan D. Gheorghe* lic. Tg.-Jiu, *Constantinescu I.* M-rea Dealul, *Goldenberg I.* Galați, *Grümberg S. Hermann* Galați, *Haimovici Salo, Herșcovici M.* Galați, *Iscovici I. I.* Pitești, *Katz Pincu* Galați, *Klein S.* Galați. *Mateescu G.* Galați, *Panait Ion* Galați, *Pârâianu Nicu* Școala Navală, *Popovici Chr. Ion* Galați, *Popovici Tiberiu* Arad, *Stamatiu I. Mih.* Pitești, *Weissemberg Eugen* Galați și *Witzmann M.* Galați.

S'a primit și o soluție neiscălită.

PROBLEME PROPUSE

205. — Suma și produsul a două numere reale raționale nu pot fi întregi în același timp decât dacă acele numere sunt ele însile întregi. Ce se întâmplă în cazul când cele două numere sunt neraționale sau imaginare?

P. SERGESCU

206. — Să se construiască, arătându-se calculele și construcțiile grafice, în ordinea lor succesivă, două segmente, astfel încât logaritmul raportului lor să fie egal cu,

$$\frac{\log 2-\log 5+\log(5-\sqrt{5})}{2}$$

D. G. PANTAZI

207. — Prin vârfurile opuse ale unui paralelogram, să se ducă două perechi de drepte paralele care să formeze un romb. In aceleași condiții să se construiască un patrat.

E. CARAMAN

208. — Se dau un cerc O, un punct I pe diametrul AB, două alte cercuri variabile, care trec unul prin O și A și altul prin O, I și intersecția M a precedentului cu primul. Să se găsească locul geometric al intersecției ultimului cerc cu dreapta centrelor celorlalte două cercuri.

C. ROIBANESCU

209. — Să se verifice identitatea:

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b=$$

$$-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

MAIOR O. BUGEANU

210. — Dacă numărul K este positiv sau nul să se arate că ecuația,

$$k^2x^2+[k+n(k+1)]x+n=0$$

are rădăcini reale oricare ar fi n real.

TH. ANGHELUTA

211. — Notațiile fiind cele obicinuite să se demonstreze că avem:

$$1+\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=\frac{2R}{r}.$$

SERBAN A. GHEORGHIU

212. — In cercul O de rază r se ia coarda AB și pe ea două puncte C și D. Știind că $\overline{AC}\cdot\overline{CB}=a$, $\overline{AD}\cdot\overline{DB}=b$ și $\widehat{COD}=45^0$, se cere lungimea coardei AB.

(r, a, b sunt cunoscute).

V. ALACI

213. — Se consideră cercul cu centrul în punctul (1, 2) și având raza egală cu r. Se cere: 1°) Ecuațiunea tangențială a acestui cerc. 2°) Ce devine acest cerc, din punct de vedere *punctual* și *tangențial*, când r tinde spre zero?

E. ABASOHN

INFORMATIUNI

Revista Matematică dia Timișoara, a început să se introducă în toate părțile și este cunoscută în toate unghiurile țării, deși este numai în al doilea an de existență. Corespondenții noștri își pot închipui că numai cu mari sacrificii s'a putut menține dat fiind scumpetea actuală a tiparului și a hârtiei.

Totuși nu am scutit nici un sacrificiu și fiindcă munca ce s'a depus a fost entuziastă și din toată inima, ea a găsit ecou și în sufletele tinerilor noștri corespondenți, care prin dragostea cu care au lucrat și prin frumoasele rezultate la care au ajuns, au fost cea mai frumoasă răsplată pentru comitetul de conducere al revistei.

Cheltuelile privitoare la revistă se referă numai la tipărire, căci toate celelalte se fac gratuit de către membri delegați de comitet. Costul unui număr se urcă la 4000 lei, ceiace face pe an o cheltuială de 48.000 lei, iar din abonamente nu încasăm decât vreo 30.000 lei. De aceia ne vedem nevoiți ca să sporim pentru anul III-lea abonamentul la 50 lei anual, suma minimă pentru a acoperi cheltuelile de tipărire.

Facem apel la tinerii noștri corespondenți care lucrează la revistă și care constată folosul ce îl trag dela dânsa, să o răspândească în cercul camarajilor lor, să o recomande celor mai mici și și celor mai mari ca dânșii, ca să putem în acest fel să repartizăm cheltuiala anuală asupra cât mai multora și să micșorăm în acest fel costul abonamentului

——

Conferințele publice care au loc la Școala Politecnică din Timișoara, s'au încheiat pe ziua de Marți 2 Ianuarie, cu conferința d-lui Lt.-Col. **Gh. Buicliu,** profesor al școlii cu subiectul: *Ceva despre Cinematograf.*

Cu vacanța Crăciunului conferințele se întrerup urmând a continua după Crăciun după programul următor:

23 Ian. **Manoilescu M.,** inginer, director al Băncii Țărănești.
Către un nou ideal național.

30 Ian. **Țițeica Gh.** profesor Universitar din București
Știința Modernă și technica modernă

6 Febr. **Petrovici I.,** fost ministru. profesor Universitatea din Iași.
Filosofie și știință pozitivă

13 Febr. **Perieteanu A.** inginer inspector general, fost director general C. F. R.
Metoda în știință

Conferințele vor continua regulat în fiecare Marți și programul se va completa cu alți conferențiari ce s'au anunțat.

——

La problemele rezolvite, publicate în acest număr, sau mai primit, pe când materia era deja paginată, următoarele soluții:

136. — *Iliescu Th., Marinescu I. Gh., Musta S., Solomon W.*

138. — *Amărăscu O. Gavril, Bogdan M., Dobrescu Babici, Georgescu P. C., Popea E. Ovidiu.*

149. — *Oprișan Ernest.*

179. — (Prima soluție). *Tricilă D. Marin* (lic. Caracal), *Ionescu I. Brezuică, Ghidalisohn I.,* lic. Galați, *Pamula Alexandru* lic. Botoșani.

——

Erată. Problemele propuse începând cu Nr. 296 și până la No. 304 inclusiv, se vor înlocui respectiv cu numerile 196—204; ceiace de altfel au observat și unii din corespondenții noștri:

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL II. 15 FEBRUARIE 1923. NO. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 3 LEI PRETUL ABONAMENULUI 30 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. MAIOR O BUGEANU CUM SE POT GASI UNELE IDENTITATI TRIGONOMETRICE PRIN DESVOLTAREA DETERMINANTILOR.
2. NOTE MATEMATICE.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE.
5. PROBLEME PROPUSE.
6 TABLA DE MATERII.
7. TABLOUL NUMELOR.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1923

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** –profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate D-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politecnice din Timișoara.

Abonamentul pe anul III-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

50 (CINCIZCEI) LEI

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Subdirectorul Școalei Politecnice

Timișoara.

ANUL II. — No.12 TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 3 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 30 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

CUM SE POT GASI UNELE IDENTITAȚI TRIGONOMETRICE PRIN DESVOLTAREA DETERMINANȚILOR

MAIOR O. BUGEANU

Am văzut în No. 8 al revistei cum se pot găsi unele identități algebrice prin desvoltarea determinanților.

Dacă în loc de determinanți algebrici desvoltăm determinanți trigonometrici vom găsi identități trigonometrice.

Iată câteva exemple de asemenea identități:

1. Fie determinantul

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin a & \cos a \\ \sin b & \sin b & \cos b \\ \sin c & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

Dacă îl desvoltăm după coloana 1-a și ținem seamă că având două coloane identice este nul, găsim identitatea:

$$\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$$

2. Fie determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

Dacă îl desvoltăm după coloana 1-a avem

$$D = \sin(b-c) + \sin(c-a) + \sin(a-b) \quad (1)$$

Acest determinant se poate desvolta și în felul următor:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \sin b - \sin a & \cos b - \cos a \\ 0 & \sin c - \sin a & \cos c - \cos a \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2\cos\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} & -2\sin\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} \\ 2\cos\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} & -2\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -4\sin\frac{b-a}{a}\sin\frac{c-a}{2}\times$$

$$\left[\sin\frac{c+a}{2}\cos\frac{b+a}{2} - \cos\frac{c+a}{2}\sin\frac{b+a}{2}\right]$$

$$D = -4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2} \quad (2)$$

Comparând (1) cu (2) deducem identitatea:

$$\sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) = -4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}$$

3. Fie determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

Dacă îl desvoltăm direct avem:

$$D = 1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c \quad (3)$$

Îl desvoltăm și în modul următor:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ 0 & 1-\cos^2 c & \cos a-\cos b\cos c \\ 0 & \cos a-\cos b\cos c & 1-\cos^2 b \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \sin^2 c & \cos a-\cos b\cos c \\ 0 & \cos a-\cos b\cos c & \sin^2 b \end{vmatrix}$$

$$=\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\,.\cos c)$$

$$=[\cos a-\cos(b+c)][\cos(b-c)-\cos a]$$

$$D=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}\times$$

$$\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2} \qquad (4)$$

Comparând (3) cu (4) deducem identitatea:

$$1+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c=$$

$$4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}$$

4. Fie determinantul

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \sin a & \sin b \\ \sin a & 0 & \sin c \\ \sin b & \sin c & 0 \end{vmatrix}$$

Desvoltându-l direct găsim

$$D=2\sin a\sin b\sin c \qquad (5)$$

Îl desvoltăm și în modul următor:

$$\cos a\,.\cos b\,.D=\begin{vmatrix} 0 & \sin a\cos b & \sin b\cos a \\ \sin a & 0 & \sin c\cos a \\ \sin b & \sin c\cos b & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \sin a\cos b & \sin b\cos a \\ \sin a & \sin a\cos c & \sin(c+a) \\ \sin b & \sin(b+c) & \sin b\cos c \end{vmatrix}$$

$$=-\sin a\begin{vmatrix} \sin a\cos b & \sin b\cos a \\ \sin(b+c) & \sin b\cos c \end{vmatrix}\times$$

$$\sin b\begin{vmatrix} \sin a\cos b & \sin b\cos a \\ \sin a\cos c & \sin(c+a) \end{vmatrix}=$$

$$-\sin a\sin b[\sin a\cos b\cos c-\cos a\sin(b+c)+$$

$$\cos a\sin b\cos c-\cos b\sin(c+a)]=$$

$$=\sin a\sin b[\cos a\sin(b+c)+\cos b\sin(c+a)-$$

$$\cos c\sin(a+b)] \qquad (6)$$

Comparând (5) cu (6) deducem identitatea:

$$\cos a\sin(b+c)+\cos b\sin(c+a)-$$

$$\cos c\sin(a+b)=2\cos a\cos b\sin c$$

5. Fie determinantul:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \sin a & \sin b \\ -\sin a & 0 & \sin c \\ -\sin b & -\sin c & 0 \end{vmatrix}$$

Îl desvoltăm astfel:

$$\cos a\cos b\,D=\begin{vmatrix} 0 & \sin a\cos b & \cos a\sin b \\ -\sin a & 0 & \cos a\sin b \\ -\sin b & -\sin c\cos b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\cos a\,.\cos b\,.D=$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin a\cos b & \cos a\sin b \\ -\sin a & -\sin a\cos c & -\sin(c-a) \\ -\sin b & -\sin(b+c) & -\sin b\cos c \end{vmatrix}$$

$$=\sin a\begin{vmatrix} \sin a\cos b & \cos a\sin b \\ -\sin(b+c) & -\sin b\cos c \end{vmatrix}-$$

$$\sin b\begin{vmatrix} \sin a\cos b & \cos a\sin b \\ -\sin a\cos c & -\sin(c-a) \end{vmatrix}$$

$$=\sin a\sin b[\cos a\sin(b+c)-\sin a\cos b\cos c+$$

$$\cos b\sin(c-a)-\cos a\sin b\cos c]$$

$$=\sin a\sin b[\cos a\sin(b+c)+\cos b\sin(c-a)$$

$$-\cos c\sin(a+b)]. \qquad (7)$$

Dacă îl desvoltăm direct obținem

$$D = 0. \qquad (8)$$

Comparând (7) cu (8) deducem identitatea:

$$\cos a \sin(b+c) + \cos b \sin(c-a) - \cos c \sin(a+b) = 0.$$

6. Fie determinanții

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ \cos b & \sin b & 0 \\ \cos c & \sin c & 0 \end{vmatrix}$$

Acești determinanți fiind nuli produsul lor va fi de asemenea nul, deci:

$$\begin{vmatrix} \sin 2a & \sin(a+b) & \sin(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin 2b & \sin(b+c) \\ \sin(c+a) & \sin(b+c) & \sin 2c \end{vmatrix} = 0$$

Desvoltând direct acest determinant găsim identitatea

$$\sin 2a \sin 2b \sin 2c + 2\sin(a+b)\sin(b+c)\sin(c+a) - \sin 2a \sin^2(b+c) - \sin 2b \sin^2(c+a) - \sin 2c \sin^2(a+b) = 0$$

sau

$$\sin 2a \sin 2b \sin 2c + 2\sin(a+b)\sin(b+c)\sin(c+a) = \Sigma \sin 2a \sin^2(b+c)$$

Dacă în această identitate înlocuim pe a, b, c prin $\frac{\pi}{4} - a$, $\frac{\pi}{4} - b$, $\frac{\pi}{4} - c$, obținem identitatea:

$$\cos 2a \cos 2b \cos 2c + 2\cos(a+b)\cos(b+c)\cos(c+a) = \Sigma \cos 2a \cos^2(b+c).$$

Această ultimă identitate se găsește și în Culegerea de probleme trigonometria IX, 19), Astfel această cale ne permite nu numai să găsim identități — pe care apoi putem să le verificăm prin calcul — dar și să verificăm identități date.

NOTE MATEMATICE

Rezolvarea ecuațiunei $a x^2 + b x + c = 0.$

Vom indica o metodă elementară diferită de cele obicinuite. Ea constă în a determina pe t și α astfel ca,

$$x = t + \alpha \qquad (1)$$

să fie o rădăcină a ecuației date, adică

$$a(t+\alpha)^2 + b(t+\alpha) + c = 0.$$

Ordonând în raport cu t, avem:

$$a t^2 + (2a\alpha + b) t + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0. \qquad (2)$$

Alegem pe α astfel ca coeficientul lui t să fie nul adică:

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

Atunci (2) devine,

$$a t^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

de unde:

$$t = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Inlocuind valorile aflate pentru t și α In (1), avem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

V. A.

In No. 8, an. I, al R. M. T., d-l Profesor G. A. Nichifor stabilește câteva relațiuni interesante în legătură cu un triunghiu dreptunghic. In cele ce urmează îmi propun a stabili alte expresii urmărind aceiaș figură.

1) Fie I intersecția (A A′, U V) avem

$$AUI \sim VAI$$

asemănarea triunghiurilor, rezultă imediat din egalitatea unghiurilor. Așa fiind să scrim proporționalitatea laturilor:

$$\frac{AU}{A'V} = \frac{UI}{A'I} = \frac{AI}{VI} \qquad (11)$$

Pentru prescurtare să însemnăm

$$UI = x\,;\ IV = y\,;\ AI = z\,;\ IV' = t.$$

Inlocuind în (11) prin aceste notaţiuni şi dacă ţinem seamă că

$\frac{AU}{A'V} = \frac{a}{b\sqrt{2}}$ [vezi în No. 8 relaţiile (5) şi (10)]

căpătăm

$$\frac{a}{b\sqrt{2}} = \frac{x}{t} = \frac{z}{y} \qquad \text{dar avem şi}$$

$$x + y = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c} \qquad (12)$$

$$z + t = \frac{bc}{a}$$

Avem deci un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute, uşor de rezolvat şi ale cărei soluţiuni sunt:

$$x = \frac{bc\sqrt{2}\,(b^2 - a^2 + bc)}{(b+c)\,(2b^2 - a^2)}$$

$$y = \frac{b^2 c\sqrt{2}\,(b-c)}{(b+c)\,(2b^2 - a^2)}$$

$$z = \frac{abc\,(b-c)}{(b+c)\,(2b^2 - a^2)}$$

$$t = \frac{2b^2 c\,(b^2 - a^2 + bc)}{a\,(b+c)\,(2b^2 - a^2)}$$

Din nou ţinând seamă de relaţiunile (5) şi (10) putem scrie:

(13) $$UI = AV\,\frac{\sqrt{2}\,(b^2 - a^2 + bc)}{2b^2 - a^2}$$

(14) $$IV = A'V\,\frac{a\,(b-c)}{2b^2 - a^2}$$

(15) $$AI = AV\,\frac{a\,(b-c)}{2b^2 - a^2}$$

(16) $$IA' = A'V\,\frac{\sqrt{2}\,(b^2 - a^2 + bc)}{2b^2 - a^2}$$

Am determinat astfel lungimile segmentelor celor două diagonale din patrulaterul AUA'V.

2) In triunghiurile dreptunghice AUV şi UA'V să însemnăm respectiv, raza cercului înscris şi razele cercurilor exînscrise, în primul triunghiu prin: r_1; α_1; β_1; γ_1; iar al doilea prin: r_2; α_2; β_2; γ_2; iar R raza cercului circumscris, fiind aceiaş pentru ambele triunghiuri, adică jumătate din UV.

a) In triunghiul VUV avem

$r_1 = \frac{s_1}{p_1}$ (s_1 şi p_1 fiind supr. şi semi-per.)

dar $s_1 = \frac{b^2 c^2}{2(b+c)^2}$ şi $p_1 = \frac{bc\,(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}\,(b+c)}$

deci $$r_1 = \frac{bc}{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)\,(b+c)} \qquad (17)$$

La fel

$$\alpha_1 = \frac{s}{p_1 - UV}\,;\ \beta_1 = \frac{s}{p_1 - AU}\,;\ \gamma_1 = \frac{s}{p_1 - AV}$$

sau făcând înlocuirile ca mai sus vom găsi

$$\alpha_1 = \frac{bc}{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)\,(b+c)} \qquad (18)$$

$$\beta_1 = \gamma_1 = R = \frac{bc}{\sqrt{2}\,(b+c)} \qquad (19)$$

Să adunăm relaţiunea (17) cu (19)

$$r_1 + R = \frac{bc}{b+c} = AU = AV \qquad (20)$$

Se observă deci, că în acest triunghiu suma razei cercului înscris cu raza cercului circumscris este egală cu o catetă.

b) In celalt triunghiu UA'V procedând în acelaş fel obţinem:

$$r_2 = \frac{\sqrt{2}\,b^2 c^2}{a(b+c)\,(a+b+c)} \qquad (21)$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}\,b^2 c^2}{a\,(b+c)\,(b=c-a)} \qquad (22)$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{2}\,b^2 c^2}{a\,(b+c)\,(a+c-b)} \qquad (23)$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{2}\,b^2 c^2}{a\,(b+c)\,(a+b-c)} \qquad (24)$$

în acest triunghiu mai putem scrie, că există şi următoarea relaţie :

$$\frac{r}{r_2} = \frac{\alpha}{\alpha_2} = \frac{\beta}{\beta_2} = \frac{\gamma}{\gamma_2} \qquad (25)$$

unde (r; α; β; γ; sunt raza cercului înscris şi razele cerçurilor exînscrise triunghiului A B C).

I. N. GEORGESCU-VAL
Şcoala de Artilerie

BIBLIOGRAFIE

Buletinul asociaţiei de matematici pure şi aplicate, Anul II, No. 5, Ianuarie 1923. Curbele de clasa III a bitangente dreptei dela infinit de *Dan Barbilian.* Asupra teoremei Ortopolului de Şerban Gheorghiu.

Gazeta Matematică, Anul XXVIII, No. 5, Ianuarie 1923. Sur la cubique de M. Cristea Mateescu et le *théorème de Simson* de *Ad. Mineur.* Despre formula cresterilor finite de *G. Bratu.* Comparaţie între produsul numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui şi produsul divizorilor acelui număr de Lt. I. Linteş.

PROBLEME REZOLVATE

131. — *Care sunt termenii comuni progresiunilor aritmetice.*

$\div 2 . 7 . 12 \ldots . ; \div 5 . 11, 17 \ldots . ; \div 7 . 15, 23 \ldots .$

I. DIMITRIU-ARAD

Prima soluţie. Termenii generali a progresiilor date sunt de forma,

$$2 + 5m,\ 5 + 6n,\ 7 + 8p$$

unde m, n, p au valoriln 0, 1, 2, 3, ...

Din enunţ rezultă că trebue să avem :

$$2 + 5m = 5 + 6n = 7 + 8p = N.$$

De aici deducem :

$$m = \frac{3 + 6n}{5} = \frac{5 + 8p}{5}$$

Pentru a obţine valori întregi pentru m, n şi p trebue să luăm,

$$n = 5a + 2,\ p = 5b$$

şi atunci,

$$m = 3 + 6a = 1 + 8b$$

$$4b - 3a = 1.$$

O soluţie particulară fiind $a = 1$, $b = 1$, soluţia generală este

$$a = 1 + 4k,\ b = 1 + 3k,\ k = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Atunci, $m = 9 + 24k$

şi deci,

$$N = 2 + 5(9 + 24k) = 47 + 120k.$$

Numerile comune progresiilor date sunt astfel de formă.

$$47 + 120k,\quad k = 0, 1, 2,$$

adică sunt

$$47, 167, 287,$$

şi se observă că şi ele formează o progresie aritmetică cu raţia 120.

Soluţiuni analoage date de d-nii : *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Amărăscu Gavril* (llc. Caracal), *Coşereanu I.* (Timişoara), *Dobrescu-Băbici* (lic. Caracal), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz Pincu* (Galaţi), *Lăzărescu H. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung-Bucovina), *Pârâianu Nicu* (Şc. Navală), *Popa I. Theodor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Popovici Tiberiu* (Arad), *Răuţ C-tin, Solomon W.* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Stoenescu I.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Sufleţel Aurel* (ab. lic. M-rea Dealu) şi *Tauber Alexandru.*

A doua soluţie. Observăm că termenii progresiilor date sunt de forma

$$5m + 2,\ 6n - 1,\ 8p - 1$$

De aici urmează că orice termen comun progresiilor a 2-a şi a 3-a va fi un multiplu al c. m. m. c. m. al numerilor 6 şi 8, minus 1, adică de forma :

(1) $$24r - 1.$$

Pentru ca astfel de termeni să se găsească şi în prima progresie, trebue ca :

$$24r - 1 = 5m + 2$$

$$24r - 5m = 3.$$

O soluție particulară în numere întregi fiind

$$m = 9,\ r = 2,$$

soluția generală este

$$m = 9 + 24k,\ r = 2 + 5k.$$

Introducând în (1) valorile lui r, găsim

$$47 + 120k$$

care este forma numerilor comune progresiilor date.

Au dat soluțiuni analoage d-nii: *Atanasiu D-tru* (Huși), *Iliescu Emilian* (M-rea Dealu), *Hrysanidi* (lic. Constanța) și *Măru D-tru* (lic. Galați).

Alte soluțiuni date de d-nii: *Asnaș I. Solomon* (lic. Călărași), *Bercovici Emil* (lic. Matei Basarab, București), *Berdan C-tin*, *Beșliu C.* (Timișoara), *Bonea I.* (lic. M-rea Dealu), *Brăileanu Alexandru*, *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Dan V.* (Galați), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Dragomir N. Ioan* (lic. Cantemir, București), *Dragomirescu-Buzne Eduard* (Șc. de Artilerie), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu Florian* (lic. Cantemir, București). *Georgescu Gorjan* (lic. Craiova), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Gogălniceanu M. Mihai* (lic. Brăila), *Flickstein I.* (lic. Cernăuți), *Ionescu Ilie* (lic. Caracal), *Lăzărescu Jean* (lic. Pitești), *Mocanu N. Aurel* (lic. Huși), *Negretzu Florea* (lic. Pitești), *Niculescu V., Pînchis M.* (lic. Galați), *Plutarch Cotaru* (student drept), *Popea G. Ovidiu* (Kișinău), *Popovici Chr. Ion* (lic Galați), *Popovici Dan Puiu*, *Propst A. Jean* (lic. T.-Severin), *Stamatiu Mih.*, *Stănescu A. Nicu* (lic. Craiova), *Theodoru St. Nicuță* (lic. Huși), *Vasiliu C. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Vicoveanu C. V.*, *Weis Leon* și *Weis Solomon* (lic. Galați).

Observare. D-nii *Georgescu Florian* și *Popea Ovidiu* și-au propus aceiași problemă pentru progresiile geometrice:

$\div 2 : 10 : 50 : \ldots$; $\div 5 : 30 : 180 : \ldots$; $7 : 56 : 448 : \ldots$

Condiția ca aceste progresii să aibă termeni comuni este:

$$2 \cdot 5^m = 5 \cdot 6^n = 7 \cdot 8^p$$

și evident că nu se pot determina numere întregi pentru m, n, p care să satisfacă aceste egalități. Progresiile date n'au prin urmare termeni comuni.

V. A.

133. — *Să se rezolve ecuația:*

$$(x^4 + 3)(x^4 + 2) = 5x^4 + 7x^{-4}$$

I. ANTONIU

Desfăcând parantezele și simplificând obținem:

$$x^8 + 6 = \frac{7}{x^4}$$

$$x^{12} + 6x^4 - 7 = 0$$

Notând

(1) $$x^4 = y$$

avem:

(2) $$y^3 + 6y - 7 = 0.$$

Observăm că primul membru se anulează pentru $y = 1$, deci se divide cu $y - 1$ și efectuând diviziunea deducem din (2),

$$(y - 1)(y^2 + y + 7) = 0$$

$$y_1 = 1,\ y_{2,3} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}$$

Înlocuind în (1) valorile găsite pentru y, obținem:

$$x^4 - 1 = 0,\quad x^4 - \frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{2} = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0,$$

$$\left(x^2 - \frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x^2 + \frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{3}\right) = 0$$

De aici deducem,

$$x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm i$$

$$x_{5,6,7,8} = \pm\sqrt{\frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}},$$

$$x_{9,10,11,12} = \pm\sqrt{\frac{1 \mp 3\sqrt{-3}}{2}}$$

Avem astfel găsite cele 12 rădăcini ale eeuațiunei date.

Soluțiuni date de d-nii: *Adam I. Mircea* (lic. Constanța), *Amărăscu O. Gavril* (lic. Caracal), *Asnaș I. Solomon* (Călărași), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bercovici Emil* (lic. Matei Basarab, București), *Berdan C.* (Bârlad), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Bolgiu B. Ovidiu* (lic. Cantemir, București), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Brăileanu Al.* (lic. Constanța), *Brătășanu Al. George* (lic. Caracal), *Brătescu H. Mihail*, *Bobârnac Mircea*, *Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Constantinescu Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Coșereanu I.* (Timișoara), *Crăinicescu Eugen* (Timișoara), *Cris-*

tescu Virgil, *Dumitriu Adrian* (lic. M-rea Dealu), *Dobrescu M. Filip* (lic. Caracal), *Dordea A. Traian*, *Dragomirescu-Buzne-Eduard* (Şc. de Artilerie), *Dumitrescu G. Marin* (Slatina), *Emilian V. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Georgescu C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val*, *Goilav Cristea* (Tecuci), *Grofşorean I. Gh.* (lic. Arad), *Grünfeld Maximilian* (lic. Brăila), *Haimovici Salo*, *Katz Pincu* (Galaţi), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Ilie* (lic. Caracal), *Ionescu I. Longin* (Caracal), *Ionescu I. Nicolae* (Piteşti), *Ioniţă M. Ioan* (Şc. de Artilerie), *Iliescu E.*, *Iordache N. Ioan*, *Iordăchescu N. Nestor* (lic. Piteşti), *Lăzărescu Th. Jean* (lic. Piteşti), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (Giurgiu), *Marinescu Gh.* (Hulubeşti), *Mateescu G.* (lic. Galaţi), *Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mitran Şt. Grigore* (Craiova), *Mocanu N. Aurel* (Huşi), *Murariu P.* (Lugoj), *Musta Ştefan* (Timişoara), *Negretzu Florea* (Piteşti), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Nicolau M. Iulian* (lic. Piteşti), *Niculescu V.*, *Oprişeanu S. Ernest* (Bârlad), *Panait Ion* (lic. Galaţi), *Pârâianu Nicu* (Şc. Navală), *Pârvulescu Titus* (lic. M-rea Dealul), *Pinchis M.* (lic. Galaţi), *Plutarc Cotaru* (student drept), *Popea Gh. Ovidiu* (Chişinău), *Popovici P. Dan* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Chr. Ion* (lic. Galaţi), *Popovici Th. I.*, *Popovici T.* (Arad), *Propst A. Jean* lic. T.-Severin), *Răuţ C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Rigani Cr.*, *Ristea Marin* (lic. Caracal), *Runcan Veniamin* (lic. M-rea Dealu), *Schileru C. Dili Şcodreanu A.*, *Schönfeld H. Conrad* (lic. Botoşani), *Silion Ion* (lic. Câmpina), *Solomon N.* (Timişoara), *Solomon Wilhelm* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Stănculescu A. Gheorghe* (lic. Piteşti), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Stoenescu I.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Theodoru St. Nicuţă* (Huşi), *Ţinea N. Ioan* (Caracal). *Ulman Octav* (Timişoara), *Vasilescu C. Virgil* (Ploeşti), *Weis Leon* (lic. Galaţi), *Weissemberg Eugen* (lic. Galaţi), *Witzmann H. Marcu*,

Observări. 1) D-l *Bonea Ioan* a rezolvat ecuaţia mai generală

$$(x^{4m}+c)(x^{4m}+c-1)=(2c-1)x^4+(c^2-c+1)x^{-4}.$$

2) D-nii: *Dordea A. Traian*, *Georgescu Er. Florian* şi *Schileru C. Dili* au rezolvit ecuaţia mai generală:

$$(x^n+a)(x^n+b)=(a+b)x^n+(ab+1)x^n$$

3. Soluţiuni necomplecte dela d-nii: *Carp Gh. Jean* (Huşi), *Ciolacu Miron* (lic. Caracal), *Flickstein I.* (Cernăuţi), *Focşeneanu I. M.*, *Gabrielescu Vasile* (Brăila), *Miclescu Andrei*, *Teodorescu St. I.*, *Vasilescu I. D.* (lic. Iaşi).

V. A.

PROBLEME PROPUSE

214. — Se consideră un triunghiu ABC şi o coardă MN, a cercului ABC, paralelă la latura BC a triunghiului. Se cere să se arate, că dreapta lui *Simson* a punctului M în raport cu triunghiul ABC este perpendiculară pe dreapta AN.

SERBAN A. GHEORGHIU

215. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=(x-p)^2+y^2\\ 2ax+2by=x^2+y^2\end{cases}$$

Şi să se determine p astfel ca soluţiile să fie raţional.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

216. — Să se stabilească identitatea,

$$y=y'+\frac{1}{(-4)^n-1}\sum_{i=1}^{4n-1}y^{(i)}$$

unde $y=e^x\sin x$, iar $y^{(i)}$ înseamnă derivata de ordinul i a lui y. Să se găsească o identitate analoagă şi pentru $y=e^x\cos x$.

T. POPOVICI.

217. — Se dau două cercuri egale tangente exterioare. Din punctele A şi B diametral opuse ale unuia din cercuri, se duc perechile de tangente AM, AM'; BN, BN'. Să se determine poziţia punctelor A şi B astfel ca suma triunghiurilor mixtilinii AMN şi BNN' să fie maximă sau minimă.

V. ALACI

218. — Să se detnrmine n astfel ca:

$$\arcsin\frac{1}{n-1}-\arcsin\frac{1}{n+1}=\pi$$

A. COMAN

219. — Notaţiile fiind cele obicinuite relativ la un triunghiu oarecare, se cere a se verifica identitatea:

$$p=a\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+b\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+$$

$$c\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

C. ROIBANESCU

TABLA DE MATERII

ARTICOLE

Cuvânt înainte		3
V. Alaci	O clasă de identităţi algebrice	3
V. Alaci	O clasă de identităţi algebrice	19
G. Bratu	Rezolvarea ecuaţiilor în mod grafic	35
P. Sergescu	O clasă de probleme din teoria ecuaţiilor algebrice	51
V. Alaci	Asupra unor însumări trigonometrice	67
Gr. Zapan	Relaţiuni între elementele unui triunghiu	83
V. Alaci	Asupra câtorva însumări	99
Incoronarea		115
Maior O. Bugeanu	Cum se pot găsi unele identităţi	116
E. Caraman	Discuţia şi rezolvarea ecuaţiei de gradul al treilea cu ajutorul discriminantului	131
Tr. Lalescu	Dreapta lui Simpson	147
Ernest Abasohn	Despre coordonate punctuale şi tangenţiale	163
Maior O. Bugeanu	Cum se pot găsi unele identităţi trigonometrice	179

BIBLIOGRAFIE

Revista de Matematicas y Fisicas elementales 43, 58, **110**
Gazeta Matematică 43, 58, 74, 109, 151, 166, **183**
Buletinul Societăţii Politecnice 74
Buletinul A. G. I. R. 93
Ing. Lorenţi A. Manual mecanic 93
Buletinul asoc. de matematici pure şi aplicate 151, 166, **183**
L'éducation Mathématique 151
Anuarul Societăţii Matematice Bârlădeană 1921—1922 151
Note matematice şi ştiinţifice 151, 166

NOTE MATEMATICE

Gh. M. Vasiliu	Asupra unei teoreme din geometria plană	11
C. E. Georgescu	Asupra problemei 39	12
D. Panaitescu	Asupra problemei 45	13
Emil Ştefănescu	Asupra problemei 41	13
Buşilă Adrian	Proba împărţirii	13
P. Corotenco	Asupra problemei 18	27
Miron Niculescu	Asupra unui determinant	28
Ion I. Iliescu	Asupra problemei 72	29
Emil Ştefănescu	Asupra teoremei lui Wilson	29
Maior O. Bugianu	Asupra problemei 63.	43
I. T. Rizescu	Asupra problemei 13	44
Stoenescu Al. I.	Asupra problemei 13	44
Lt. I. Linteş	O teoremă	45
N. Georgescu-Roegen	Asupra unei relaţii trigonometrice	45
V. Cristescu	Asupra articolului «Despre ortopol»	58
I. N. Georgescu-Val	Asupra problemei 13	59
Micu Grünbaum	Asupra dreptei lui Simpson	59
Ion S. Antoniu	Relaţiuni între media geometrică, media aritmetică şi media armonică a mai multor numere	60
Ion Rizescu	Asupra problemei 7	61
V. Cristescu	Asupra problemei 84	74
A. Th. Nicolau	O propoziţiune de aritmetică	75
A. Nicolau	Asupra câtorva derivate de ordinul n	75
Ion I. Iliescu	Asupra problemei 78	75
	Asupra problemei 66	75
Maior O. Bugianu	Asupra formulei binomului	76
A. Th. Nicolau	Asupra problemei 84	77
I. Coşereanu	Asupra problemei 52	93
Traian A. Dordea	Asupra notei d-lui I. Antoniu	93
Ion Şerbănescu	Asupra unei note matematice	108
N. Georgescu-Roegen	Asupra problemei 64	109
I. T. Rizescu	Asupra triunghiurilor în care laturile formează o proporţie armonică	122
Buşilă Adrian	Proba unor operaţiuni aritmetice	123
Lt. I. Linteş	Fiind date şirurile de numere	123
Traian Lalescu	Asupra problemei 2755 din Gazeta Matematică	137
Lt. I. Linteş	Asupra problemei 13	137
Fl. Er. Georgescu	O proprietate a segmentelor determinate de bisectoarele unui triunghiu pe laturile opuse	148

Ion T. Rizescu	Asupra problemei 13 . . .	149
Maior O. Bugeanu	Asupra chestiunei III date la examenul de intrare în Școala Politecnică la lucrarea scrisă	150
E. Caraman	Rezolvarea ecuației de gradul al patrulea	165
Octav Ulman	Asupra lunulelor lui Hipocrate	166
V. A.	Rezolvarea ecuației ax^2+bx+c	181
Georgescu-Val I.	Asupra unui articol	181

RECREAȚIUNI MATEMATICE

X.	. . . . .	42
V. I. Vicoveanu	Paradox matematic	58
Gr. Zapan	Ghicirea orei la o persoană .	73
M. V.	Calculul mintal	74
„	Să se ghicească mai multe numere gândite	92
„	Gaura și bila	92
„	O persoană face două pachete	108
O. Ulman	Cum se pot ghici rezultatul unor calcule	122
Dili C. Schileru	Orice număr e egal cu unitatea	136
Pincu Katz	Asupra unui joc cu numere .	136
***	Achile și broasca țestoasă . .	150
Georgescu Er. Florian	Ghicirea rezultatului unor operațiuni	151

CHESTIUNI DE EXAMEN

Școalele militare de artilerie, geniu și construcții . 109
Școala Politecnică din Timișoara 1922 . . . . 124, 138
Soluțiile chestiilor de geometrie 139
Soluțiile chestiilor de algebră 151
Școala militară de artilerie 166

PROBLEME PROPUSE

Numărul de ordine al problemei în *cifre cursive*, primul număr următor indică pagina unde a fost propusă (urmată de *cifra romană* I, adică anul I), al doilea, pagina unde a fost rezolvată, N este nerezolvată.

15, 30 I, 36; *25*, 62 I, 53; *30*, 78 I, 22; *32*, 78 I, 53; *42*, 94 I, N; *50*, 110 I, N; *54*, 126 I, N; *56*, 126 I, 37; *58*, 126 I, N; *59*, 126 I, 23; *60*, 126 I, 102; *61*, 126 I, 38; *63*, 142 I, 6; *65*, 142 I, 118; *66*, 142 I, 7; *68*, 142 I, 8; *70*, 142 I, N; *71*, 142 I, 24; *72*, 158 I, 11, *73*, 158, I, 54; *74*, 158 I, 9; *75*, 158 I, 39; *76*, 158 I, N; *77*, 158 I, 40; *78*, 158 I, 25; *79*, 158 I, 27; *80*, 158 I, N; *81*, 174 I, N; *82*, 174 I, N; *83*, 174 I, 55; *84*, 174 I, 40; *85*, 174 I, 55; *86*, 174 I, 26 (41); *87*, 174 I, 41; *88*, 174 I, N; *89*, 187 I, 42; *90*, 187 I, 71; *91*, 187 I, N; *92*, 187 I, N; *93*, 187 I, 56; *94*, 187 I, 56; *95*, 187 I, 57, *96*, 187 I. 119; *97*, 187 I, 85; *98*, 187 I, N; *99*, 187 I, N, *100*, 14, N; *101*, 14, N; *102*, 14, 71; *103*, 14, 72; *104*, 14, 86; *105*, 14, 72; *106*, 14, 88; *107*, 14, 120; *108*, 14, 154; *109*, 14, N; *110*, 14, N; *111*, 29, 89; *112*, 29, 89; *113*, 29, 90; *114*, 30, N; *115*, 30, 91; *116*, 30, 134; *117*, 30, 120; *118*, 30, 103; *119*, 30, 104; *120*, 30, 105; *121*, 30, N; *122*, 46, 106; *123*, 46, 107; *124*, 46, 121; *125*, 46, N; *126*, 46, 154; *127*, 46, 154: *128*, 46, 156; *128 b*, 46, 135; *129*, 46, 167; *130*, 62, 135; *131*, 62, N; *132*, 62, N; *133*, 62, N, *134*, 62, N; *135*, 62, N; *136*, 62, 168; *137*, 62, N; *138*, 62, 169; *139*, 62, N; *140*, 62. N; *141*, 62, N; *142*, 77, N; *143*, 77, N; *144*, 77, N; *145*, 77, N; *146*, 78, N; *147*, 78, N; *148*, 78, N; *149*, 78, 171; *150*, 78, N; *151*, 78, 157; *152*, 78, N; *153*, 78, N; *154*, 78, N; *155*, 94, N; *156*, 94, N; *157*, 94, N; *158*, 94, N; *159*, 94, N; *160*, 94, N; *161*, 94, N; *162*, 94, N; *163*, 94, N; *164*, 94, N; *165*, 94, N; *166*, 110, N; *167*, 110, N; *168*, 110, N; *169*, 110, N; *170*, 110, N; *171*, 110, N; *172*, 110, N; *173*, 110, N; *174*, 110, N; *175*, 110, N; *176*, 126, N; *177*, 126, N; *178*, 126, N: *179*, 126, 173; *180*, 126, N: *181*, 126, N; *182*, 126, N; *183*, 126, N; *184*, 126, N; *185*, 126, N; *186*, 142, N; *187*, 142, N; *188*, 142, N; *189*, 142. N; *190*, 142, N; *191*, 142, N; *192*, 142, N; *193*, 142, N; *194*, 142, N; *195*, 142, N; *196*, 158, N; *197*, 158, N; *198*, 158, N; *199*, 158, N; *200*, 158, N; *201*, 158, N; *202*, 158, N; *203*, 158, N; *204*, 158, N; *205*, 174, N. *206*, 174, N; *207*, 174, N; *208*, 174, N; *209*, 174, N; *210*, 174, N; *211*, 174, N; *212*, 174, N; *213*, 174, N. *214*, 185, N; *215*, 185, N; *216*, 185, N; *217*, 185, N; *218*, 185, N; *219*, 185, N.

TABLOUL NUMELOR

Abasohn E., 34, 62, 126, 163, 175
Abramescu N., 2, 7, 30, 32, 53, 55, 62, 105, 109, 158
Adam I. M.. 156. 169, 184, 183.
Alaci V., 2, 3, 19, 30, 36, 46, 56, 67, 91, 99, 110, 111, 126, 130, 143, 146, 158, 162, 173, 174, 185.
Alexandrescu Elena, 34.
Alexandrescu Mihai, 121, 135, 136, 154, 156, 171.
Altănescu Nicu, 42.
Amărăscu O. Gavril, 7, 11, 24, 25, 26, 40, 56, 87, 89, 90, 91, 92, 104, 106. 135, 136, 156, 157, 169, 174, 183, 184,
Angelescu A., 18, 94.
Angelescu C., 57, 127.
Angheluță Th.. 2, 11, 14, 46, 121, 154, 158, 174.
Antistescu V., 10, 24, 53, 56, 127.
Antoniu I., 6, 7, 9, 24, 25, 26, 40, 42, 56, 57, 58, 61, 62, 71, 72, 73, 78, 79, 86, 87, 88, 89, 93, 104, 135, 136, 184.
Apreutesei I., 6, 57.
Arcadian N., 7, 25, 39, 56, 87, 91, 104, 136. 169, 171.
Arié S. Leon, 159.
Atanasiu I. D-tru, 7, 9, 24, 25, 41, 53, 56, 57, 58, 63, 68, 71, 86, 89, 90, 91, 107, 135, 136, 169, 184.
Atanasiu V. Emil, 7,
Atanasiu Virgil, 71, 136.
Avereanu Petre. 53.

Bacalu D., 10, 25.
Baldaff Ig., 43, 58, 110.
Balaban N., 2
Baron C., 2.
Bălescu Cr. 6, 7, 169, 171.
Bănărescu A. L., 14, 41, 42, 53, 54, 56, 57, 58, 71, 88, 89, 90.
Bănărescu M., 159.
Bănărescu Val., 127.
Banciu I., 34.
Barbălatt C., 79.
Barbat Bart., 127.
Bărglăzan A., 89.
Beldie D., 156, 169.
Beju Tr., 91.
Bercovici Em., 46, 56, 87, 91, 92, 103, 105, 111, 121. 135, 136 156, 171, 184.
Bercescu A., 89.
Berdan P. Const., 7, 25, 26, 39, 41, 42, 53, 56, 57, 58, 71, 72, 73, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 104, 107, 135, 136, 155, 156, 157, 168, 169, 171, 184.
Berea I., 7.
Besceanu Ion, 7.
Beșliu C. Gh., 6, 24, 27, 40, 57, 58, 111, 122, 127, 136, 155, 156, 169, 184.
Biernaschi C., 7, 53, 54, 57.
Blașian V., 31, 159.
Blumenfeld D., 169.
Bobârnac M., 24, 39, 72, 86, 103, 107, 111, 127, 134, 154, 157, 168, 169, 171, 184.
Bocioacă R. A., 127.
Bolgiu Ov., 184.
Bonea I., 24, 41, 42, 56, 57, 58, 71, 86, 87, 88, 104, 107, 135, 136, 168, 184, 185.
Boșoancă M., 151.
Brăileanu N., 39, 41, 58, 71, 73, 87, 88, 104, 107, 136, 155, 156, 169, 171, 184.
Branover L., 169.
Brătășanu G., 56, 136, 169. 184.
Brătescu M., 25, 87, 104, 106, 120, 122, 155, 157 171, 184.
Brătescu-Râmnic A., 136, 137, 168, 169.
Bratu N. Dum., 10.
Bratu Gh., 18, 35, 62.
Breazu D., 2.
Bredău D., 127.
Brucker R., 106, 135.
Budișteanu R. A., 7.
Bugeanu O., 30, 44, 62, 77, 104, 150, 174, 179.
Buicliu Gh., 2, 14, 30, 31, 46, 58, 62, 72, 94, 111, 126, 134, 156, 158, 168, 175, 185.
Bușilă A., 6, 13, 25, 26, 39, 40, 41, 53, 56, 57, 58, 63, 71, 72, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 101, 105, 107, 111, 123, 135, 136, 157, 168, 169, 170, 171.
Busuioc O. A., 25.
Buttu V., 107.

Calleya M., 7, 56, 57, 58, 86, 87, 104.
Călin I. Aur., 40, 71, 157.
Cândea C. Dr., 2, 15, 94.
Cândea I., 25.
Capitan A. C.. 169.
Caracaș I. St., 7, 25, 39.
Caraman E., 34, 131, 166, 174.
Caraman St., 31.
Cârdeiu V., 79, 82.
Carp I., 185.
Cazacincu T., 53,
Cazanchi P., 26, 42, 56, 71, 73, 87.
Cernătescu D. I. 14, 30,
Chelsoi N., 87, 103.
Chiorescu C., 7, 10, 24, 27, 38, 57, 58, 73, 88, 111.
Chirculescu Gh., 6.
Chiriac St., 7.
Cioică I., 7, 25.
Ciolacu St. M., 7, 25, 26, 39, 56, 57, 58, 92, 104, 135, 156, 157, 169, 185.
Ciorănescu S. N., 10, 24, 79, 94, 107, 110, 111, 184.
Ciucur C., 6.
Cojan Gh., 174.
Cocorandu M., 7, 24, 25, 26, 56, 57, 58, 73, 87, 88, 90 91, 92 104, 105, 106, 121, 122, 134, 136, 154, 156, 157, 168, 169, 171. 174, 184.
Coman A., 2, 185.
Conduratu M., 39.
Constantinescu I., 7, 26, 42, 53, 56, 57, 71, 72, 73, 87, 88, 89, 104, 106, 185, 135, 136, 169, 171, 174, 184.
Constantinescu M., 56, 87. 91, 103, 169.
Corotenco P., 28.
Corti S., 43.
Cosereanu St. I., 7, 9, 10, 24, 25, 26, 27, 39, 41, 56, 72, 73, 86, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 104, 105, 106, 107, 110, 111, 120, 121, 127, 134, 135, 136, 154, 156, 157, 168, 169, 170, 176, 183, 184.
Cosma A., Dr., 133.
Costăchescu N. I., 71.
Coste I., Dr., 143.
Crăciun St. Milan, 127.
Crăiniceanu Gh., 73, 88, 120.
Crăinicescu Eug., 24, 26, 57, 58, 92, 120, 127, 155, 157, 169, 184.
Crețu I. A., 7, 25.
Cristescu I., 2.
Cristescu V., 59, 185.
Cristian I. B., 171.
Curea I., 41, 103.

Dan V., 6, 9, 10, 25, 26, 39, 54, 71, 72, 87, 111, 122, 134, 136 137, 169, 171, 184.

Demetrescu G., 107.
Demetrescu M., 7.
Diaconescu N., 2.
Dimitriu D. P., 53.
Dinulescu N. N., 7, 10, 24, 25, 40, 41, 56, 57, 58, 71, 72, 87.
Dinuleseu E., 86.
Dobrescu M. Filip, 7, 25, 26, 39, 42, 53, 56, 57, 58, 71, 89, 92, 103, 104, 121, 136, 156, 169, 185.
Dobrescu N. Nic., 40.
Dobrescu Babiciu, 107, 111, 157, 171, 173, 175, 183.
Dordea Tr., 8, 9, 10, 26, 56, 58, 71, 87, 90, 91, 94, 104, 107, 121, 134, 135, 136, 154, 158, 169, 185.
Doru Raul, 7, 10, 25.
Dospinoiu N., 41, 42, 55, 56, 58, 89, 90, 91, 92, 120.
Dragomir M. Ion, 72, 73, 88, 90, 91, 104, 107. 121, 135, 136, 154, 156 157, 169, 171, 184.
Dragomirescu-Buzne Ed., 7, 24, 26, 40, 56, 57, 53, 87, 92, 103, 111, 134, 136, 155, 157, 169, 184, 185.
Dragomirescu Ion, 72, 73, 87, 88, 92, 104, 105,
Dragoș Severin, 91,
Dumitrescu G., 18.
Dumitrescu G. Marin, 7, 9, 28, 56, 57, 71, 89, 90, 111, 136, 169, 184, 185.
Dumitrescu I. Pavel, 111, 120, 122, 134, 156, 157, 168.
Dumitriu Aurel, 39, 53, 57, 71, 155, 169, 185.
Dumitriu Arad I., 2, 6, 14, 38, 39, 43, 62, 172, 183.
Dutulescu M., 34.

Echidarie Fr., 24, 25.
Edelstein S.. 7, 9.
Emilian V. I., 185.

Fântânianu Ion, 7, 8, 10, 40.
Faraday M., 43.
Fayon R., 79.
Filip V. C., 10, 25.
Fintescu A., 79.
Flichstein I., 111, 121, 122, 184, 185.
Florescu B. I., 23, 25, 36, 38, 46, 53, 79.
Focșeneanu L., 10, 26, 42, 54, 56, 71, 86 87, 88, 107, 111, 120, 121, 122, 135, 136, 156, 168, 169, 184, 185
Frătici I., 121, 156.
Freifeld I., 10, 26, 27, 57, 58, 80, 88, 92, 105, 119, 135, 169, 184, 185

Gabrielescu V., 63, 71, 87, 104, 107, 111, 121, 136.
Gaef Gh., 24, 127.
Gael I., 127.
Gârlișteanu M., 39.
Garonne B., 58.
Gâtan M., 7, 9, 10, 21, 25, 26, 40, 53.
Gavrilescu L., 71.
Geanău I., 72, 87, 135, 154.
Georgescu C. I., 7, 9, 10, 24, 26, 38, 39, 40, 41, 53, 56, 57, 58, 73, 87, 89, 90, 101, 135, 136, 157. 169, 171.
Georgescu D., 2.
Georgescu E. C., 7, 8, 10, 13, 25, 26, 40, 41, 42, 54, 56, 57, 58, 71, 72, 73, 79, 87, 88, 89, 90, 91, 103, 106, 107, 121. 135. 154, 169, 175, 185.
Georgescu E. Fl., 7, 8, 10, 24, 25, 26, 38, 39, 41, 53, 54, 56, 57, 58, 71, 72, 73, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 104, 106, 107, 110, 111, 121, 122, 135, 136, 147, 151, 154, 156, 157, 158, 168, 169, 170, 184, 185.
Georgescu N. Ion, 53, 56, 57, 71, 72, 92.
Georgescu Gorjan St., 135, 169, 184.
Georgescu-Roegen N., 8, 9, 10, 26, 39, 42, 46, 53, 54, 56, 57, 71, 77, 79, 86, 103, 109.
Georgescu T., 10, 25, 40, 53.
Georgescu-Val N. I., 7, 10, 23, 24, 26, 39, 40, 56, 57, 59, 71, 72, 77, 86, 87, 88, 89, 91. 103 105, 106, 107, 111, 120, 121, 134, 136, 156, 157, 158, 169, 170, 173, 183, 184, 185.
Ghermănescu M., 149.
Gheorghiade R., 111.
Gheorghiu S., 174, 185.
Gheorghiu Tr., 107,
Ghidalisohn I., 175.
Ghițescu V., 25, 26, 40, 41, 42, 56, 57, 58, 71, 72, 73, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 104, 135, 136, 156, 157, 168, 169.
Gianni Gr., 7, 57, 88.
Giotta V., 7, 10, 25. 26, 40, 41, 58, 71, 73, 87, 88, 90, 91, 92, 101, 107, 135, 136.
Giovanni Gr., 72.
Glasberg R., 7, 8, 9, 10, 24, 40, 41, 56.
Goilav Gr., 6, 8, 9, 10, 24, 26, 27, 38, 39, 53, 56, 57, 71, 73, 87, 88, 89, 90, 91, 94, 101, 105, 106, 107, 110, 120, 122, 134, 156, 157, 158 168, 169, 171, 185.
Goldenberg I., 174.
Gogălniceanu M., 7, 25, 26, 40, 56, 57, 58, 88, 90, 101, 136, 157, 169, 184.
Gorovei S., 25.
Grofșorean G., 169, 185
Grünbaum M , 41, 55, 60, 79.
Grünberg H., 169, 174.
Grünfeld M., 25, 42, 56, 71, 90, 136, 168, 169, 185.
Guțu A., 111.

Haimovici S., 174, 185.
Haret G., 79.
Harth E., 169.
Herscovici M., 174.
Hirsson Hary, 7, 8.
Hrysanidi D., 111, 121.
Huber I., 56, 73, 86, 88.
Hurmuzescu D., 31.

Iancu Ismail, 42.
Iancu I. N., 88, 156.
Iliescu I. Ion, 8, 9, 10, 25, 26, 29, 42, 56, 57, 72, 73, 75, 76, 87, 88, 89, 103, 104, 105, 111, 154, 157.
Iliescu Gh., 88.
Iliescu Th., 175.
Iliescu-Zătreni Em., 6, 7, 9, 24, 26, 29, 41, 42, 56, 57, 58, 71, 72, 73, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 104, 106, 111, 134, 156, 160, 169, 184, 185.
Ionescu Argetoaia I., 159.
Ionescu Brezuică, 175.
Ionescu K. C., 34.
Ionescu T. Carol, 7, 24, 25, 71, 107, 111, 121, 136, 169, 183, 185.
Ionescu Dan, 7, 8, 9, 10.
Ionescu D. I., 57, 58, 72, 73, 81, 88, 91, 92, 104, 135, 136, 169, 171, 185.
Ionescu I., 31, 43.
Ionescu Longin 25, 111, 157, 169, 171, 185.
Ionescu Ilie, 25, 26, 39, 42, 53, 56, 58, 71, 87, 89, 91, 92, 104, 106, 111, 121 135, 136, 156, 169. 171, 184, 185.
Ionescu I. Nicu, 43, 53, 57, 92.
Ionică Eug., 10, 25, 56, 87, 104, 119, 156, 171.
Ionică Ion, 7.
Ioniță M. I., 7, 10, 24, 26, 41, 53, 56, 57, 58, 86, 88, 91, 103, 105, 134, 136, 157, 169, 176, 185.
Iordache N. I., 156, 169, 185.
Iordănescu Nestor, 7, 56, 111, 135, 171, 185.
Iorga N., 31.
Iorgulescu C., 7, 8, 10, 24, 26, 27, 38, 56, 57, 58, 73, 86, 87, 103, 127, 154.
Iosif Ion, 53.
Irimia M., 6, 7.
Iscovici I., 174.
Izidor I., 71.

Jeannel I., 759.
Jujescu G., 79.
Juster Puiu, 7, 9, 25, 26, 41, 42, 46, 55, 56, 57, 58, 72, 73, 86, 87, 88, 90, 92, 104, 119, 127, 134, 154.

Kanner A., 7, 10, 11, 24, 26, 39, 56, 63, 103.
Kassargian A., 7.
Katz P., 7, 9, 10, 25, 33, 56, 57, 58, 63, 71, 72, 73, 78, 87, 89, 90, 91, 92, 104, 106, 107, 111, 121, 135, 136, 137, 156, 157, 168, 169, 171, 174, 183, 184.
Klein R., 15.
Klein S., 57, 111, 156, 157, 169, 171, 174.
Krauss, 47.

Lalescu Tr., 2, 13, 15, 43, 55, 137, 142, 147.
Lambrino Gh., 159.
Lăzărescu G. I., 7, 26, 57, 58, 72, 73, 87, 91, 92, 104, 135, 156, 157, 169, 185.
Lăzărescu F. St., 7, 25, 87, 104, 111, 121, 122, 126, 135, 136, 156, 169, 171, 183, 184, 185

Lemeș M., 10, 24.
Leonida D., 31, 159.
Lindenberg Lionel, 7.
Linteș I., 14, 22, 23, 44, 45, 94, 124, 126, 137, 142, 167.
Liteanu Gh., 34.
Livada Gr. 41, 55, 56, 57, 63.
Lorenți A., 93.
Losner S., 57.
Lungu I., 25.
Lupă I., 159.
Lupan A., 159.

Maciolla Gh., 7.
Macri S., 26, 58, 72, 87, 92, 105, 157
Maguriru A., 7.
Manoilescu M., 31, 175.
Mansion P., 43.
Manughevici C., 34, 50.
Marcovici I., 157.
Mărculescu G., 10, 26, 41, 56, 58.
Mardan D., 2, 79, 159.
Mareș C., 127.
Mărienuț Uros, 6, 39.
Marin T., 147.
Marinescu I. Aristide, 56.
Marinescu Gh., 155, 185.
Narinescu V. I., 7, 24, 40.
Marinescu M. Ion, 53, 56, 57, 71, 90, 91, 107, 136, 175.
Martinian B., 10, 11, 25, 26, 40, 53, 56, 57, 58, 71, 87, 88, 89, 90, 91, 104, 111, 135, 136, 156, 157, 168, 169, 175, 184.
Măru D., 7, 10, 24, 25, 39, 41, 56, 57, 58, 71, 72, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 104, 107, 120, 122, 135, 136, 157, 158, 168, 169, 173, 184, 185.
Natei Nic., 73,
Mateescu-Buzău D., 7, 10, 25.
Mateescu Gh, 169, 171, 174, 185.
Mayo Angelo, 40.
Mehlmann Th., 25, 57, 79, 91, 105, 111, 121, 122, 135, 136, 142, 156, 157, 158, 168, 169, 183, 185
Melinte Gh., 7, 10, 25, 26, 40, 56, 57, 87, 127.
Mayer A. Nussem, 7.
Micinovici A., 7.
Miclescu B. Andrei, 7, 10, 24, 26, 38, 39, 40, 42, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 71, 72, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 104, 106, 107, 121, 135, 154, 156, 157. 168, 169, 171, 183, 185.
Micula Vasile, 91.
Mihăescu C., 73, 87, 104, 105, 105, 111, 135, 156, 169, 171, 185.
Mihaly E., 50.
Mihăilescu C., 158.
Mitulescu A., 7, 10, 25, 53, 57.
Mitran Cr., 169, 185.
Miulescu N., 6, 7, 10, 24, 42, 53.
Mocanu A., 56, 88, 104, 158, 169, 171, 184, 185.
Modrogan I., 7, 25, 40.
Moisescu V., 7.
Moisil G. Gr., 9, 40, 71, 73, 88, 106, 156.
Moroianu A., 57, 87, 91, 104, 135, 136, 155, 156.
Morway C-, 77.
Mucichescu N., 7, 10, 25, 40, 41, 53, 87, 169.
Murariu P., 92, 111, 121, 122, 136, 169, 185.
Muș Orest, 7, 24, 26, 58, 92, 127, 156.
Musta St., 7, 11, 25, 40, 41, 56, 57, 58, 92, 157, 175, 185.
Muzicescu N., 2, 63.

Nancă N. E., 7, 10, 24.
Naneș G., 149.
Nanescu A. N., 41.
Negoescu W., 54.
Negretzu Fl., 6, 7, 9, 23, 24, 25, 26, 39, 40, 42, 53, 56, 57, 58, 71. 72, 73, 79, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 104, 105, 106, 107, 120, 121, 135, 136, 156, 158, 168, 169, 174, 185.
Negreu P., 7, 136, 169
Negru C. P., 58.
Negulescu D., 27.
Neștianu Gh., 53, 56, 57, 63, 71, 86, 89, 90, 91, 107, 135, 136, 169, 185.
Nichifor Gh., 34, 172.
Nicolae Matei, 7, 24.
Nicolau A., 53, 54, 55, 92, 118, 127.
Nicolau Th. A., 7, 8, 10, 24, 36, 39, 41, 46, 54, 55, 62, 75, 77, 78, 94, 106, 110, 120, 126, 142, 155, 157.
Nicolau Hr., 91, 94.
Nicolau Iulian, 56, 27, 57, 58, 122, 136, 157, 185
Nicolau M., 14, 58, 59, 74, 119, 120, 172.
Nicolau P., 159.
Nicolescu G. Isaiia, 7, 25, 40, 41, 42, 58, 71, 73, 87, 90, 103, 107, 136.
Nicolescu Sorin, 7, 25, 38.
Niculae Gh. A., 24.
Niculescu Alex. 10. 11, 27, 71, 78, 88, 94, 105, 106, 136, 169.
Niculescu D. B., 79.
Niculescu Miron, 29. 54, 78, 94, 109.
Niculescu Val, 169, 184, 185.
Nistor D. Dr. 143.
Noaghea Gh, 2.
Novac H., 7, 25, 57, 71.
Nowotny El., 25, 57, 58, 86.

Oprișeanu Gh. E., 7, 25, 26, 39, 41, 56, 58, 73, 86, 87, 90, 92, 104, 105, 111, 135, 158, 169, 170, 175, 185.
Orășeanu C., 34.

Păcuraru C., 7.
Pamula Alex., 7, 26, 56, 57, 71, 72, 73, 87, 90, 92, 101, 136, 158, 169, 175.
Panait Ion, 7, 169, 174, 185.
Panaitescu D., 13.
Pantazi D., 57, 91, 168, 174.
Panu Alex., 7.
Para Dionisie, 53.
Pârâianu Em., 7, 25.
Pârâianu N., 7, 8, 9, 10, 25, 26, 39, 42, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 71, 119, 136, 154, 156, 157, 169, 170, 174, 183, 185.
Pârvulescu T., 136, 185.
Păsculescu N., 53.
Păslea V., 169.
Pavlu Ed., 7, 10, 25, 39, 40, 41, 54.
Percea Viorel, 7, 9.
Perieteanu A., 175
Petersen J, 132.
Petrescu A., 18.
Petrescu Cernea, 21, 53, 57, 71, 157.
Petrescu N., 25.
Petricoane Dr., 2.
Petrovici I., 133.
Pinchis M., 155, 156, 169, 184, 185.
Plutarch C., 158, 184, 185.
Pollak A., 119.
Poppa I. T., 7, 9, 25, 27, 41, 42, 56 57, 58, 71, 72, 73, 87, 90, 101, 105, 107, 135 136, 156, 169, 183.
Popa V. 24.
Popea Ovidiu, 7, 9, 41, 55, 71, 86, 87, 90, 101, 107, 111, 136, 169, 175, 184, 185.
Popeanu A., 39.
Popescu Aurelian, 7, 103.
Popescu D. Gh., 10, 14, 24, 26, 38, 39, 40, 45, 79, 86.
Popescu S. Gr., 7, 8.
Popescu M. I., 7, 10, 25, 57, 58, 71.
Popescu St. M., 7, 23, 25, 27, 38, 39, 41, 53, 55.
Popescu N. N 169.
Popescu N. St., 7, 9, 10, 23, 24, 25, 26, 38, 39, 42, 56, 57, 58, 71, 72, 73, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92. 104, 106, 107, 113, 122, 135, 156, 157.
Popescu Vlad., 127.
Popovici C. I., 7, 8, 9, 36, 41, 37, 58, 63.
Popovici Puiu Dan, 71, 89, 90, 91, 107, 111, 136, 184, 185.
Popovici Th. I., 119, 136, 155, 156, 169, 185.
Popovici C. I, 169, 171, 174, 184, 185,
Popovici Tib., 7, 9, 10, 21, 27, 29, 39, 40, 42, 53, 56, 57, 58, 71, 72, 73, 78, 86, 87, 88, 89, 92, 102, 105, 107, 111, 119. 120, 121, 122, 135, 136, 154, 155, 156, 157, 158, 168, 169, 171, 173, 173, 183, 185.
Propst J., 7, 39, 41, 56, 57, 58, 87, 106. 122, 135, 156, 169, 171, 184, 185.
Prundeanu Ilie, 25, 26, 39, 56, 57, 58, 71, 87, 92, 104.

Răbăgia Tr., 7, 24, 26, 57, 58
Rădulescu E. I., 7, 41, 56.
Rădulescu Gh.. 26, 41.
Rădulescu Titi, 71, 158.
Rafiroiu I., 7, 24, 127.
Răut C., 53, 57. 71, 90, 92, 135, 136, 183. 185.
Resceanu S. I., 25, 40, 53, 56, 57.
Rigani Cr., 40, 41, 56, 58, 73, 87, 88, 90. 92, 104, 106, 07, 122, 135, 136, 156, 157, 171, 185.
Ristea N. Marin, 25. 25, 39, 53, 56, 57, 58, 71, 136, 157, 169, 185.
Rizescu I., 44, 56, 61, 62, 87, 90, 103, 106, 156, 171.

Roibănescu C., **11**, 34, **174**, 185.
Rosetel Boju, **10**, 40, 41, 56, 57, 58, 86, 88, 89, 169.
Rouse Ball, 43, **150**
Runcan V., **169**, 185.
Rüster A., 47.

Săceanu S., 15.
Saegiu Em., 34.
Samoilă D-tru, 25, 56, 57, 87, 90, **101**, **135**, **156**, **169**.
Samovici I., 7, **10**, **25**, 26, 39, **40** 56, 57, 58, 63, 72, 87, **104**, **105**, 135, 36, **151**, **169**.
Samsonovici S., 89, 80.
Săndulescu C., 23, **21**, 56, 57, 86, 142
Sarian M., 14, 24, 72, 78, 79, **110**.
Săvescu Gh. M., 7, 8, 9 **10**, 21, 26, **27**, 38, 39, 53, 56, 57, 58, 71, **72**, 73, 86, 87, 88, 91, 103, **105**, 106, 119, **121**, **131**, **154**.
Sbiera I., 27.
Schileru Dili, 7, 8, 9, **10**, **25**, 26, 39, **40**, 42, 53, 56, 57, 58, 63, 71, 72, 73, 86, 88, 89, **136**, **155**, **156**, **157**, **171**, **185**.
Schlesinger P., 91.
Schönfeld C., 57, 58, 90, 107, 136, **155**, **169**, 185
Scodreanu Alex., 7, 8, **10**, **21**, 25, 26, 30, 40, **41**, 42. 53. 54, 57, 58. 73, 85, 87, 88, 89, 92, 135, **136**, **155**, **157**, **168**, **169**, **171**, 184
Scoruşeanu E., **71**, 73, 87, 88, 90, **101**, **105**, **106**, **120**, **134**, **156**, 65.
Segall S., 25, 88.
Sendreanu Al., 38.
Şerbănescu M. I., 6, 8, **11**, 23, 24, 25, 26, 39, **40**, **41**, **42**, 46, 53, 56, 58, **71**, 72, 78, 86, 87, 88, 89, 90, **101**, 107, **109**, **120**, **154**, **171**.
Sergescu P., **27**, 29, 43, **51**, 58, 90, **110**, **114**, **174**.
Silion Gh. I., 7, 9, 23, 24. 25. 40, 42, 57, 58. 71, 73, 87, 88. 92, 111, **121**. **135**, **154**, **156**, **157**, 6 , **169**, **171**, 185.
Simionescu Nic., 7, 25, 71.
Simniceanu S., 34.
Smighelschi O., **53**.
Socaciu E., **57**.
Socianu V. Em., 7, **10**, **21**, 26, **27**, 56, 53, 71, 72, 73, 86, 87, 88, **101**, **120**, **134**, **154**.
Solacolu S., 87, 88, 89, 90, 91, **101**, 107.
Solomon Alfred, 41, 42, 56, 72, 73, 79, 87, 88, 90, 91, **101**, 107, 155, 158.
Solomon Asnaş, 7, 24, 27, 41, 53, 56, 58, 107, **111**, **169**, **184**.
Solomon Lud., 7, 38.
Solomon Wilhelm, 42, 53, 56, 71, 79, 87, 88, 90, 91, 107, **111**, **121**, **136**, **163**, **169**, **175**, 183, 185.
Solomon Nicu, **169**, 185.
Sorescu I. Gh., 88, **119**, **120**
Spineanu C., **31**.
Stamatescu I. Val., 10, **11**, **21**, 25, 26, 27, 39, 40, 56, 72, 87, 88, 89, 104, **106**.
Stamatiu M., 72, 73, 87, 88, 89, 91, **111**, **122**.
Stăncescu C. Dr., 2, **31**, 41, **142**.
Stănciulescu Gh., 72, 87, 88, 89, 91, 92, **104**, **107**, **111**, **121**, **135**, **156**, 158, **174**, 184
Stancu Gh., 42, 56, **58**, **71**, 87, 89, 90 **101**, 135.
Stănculescu S., 6, 7, 21, 127.
Stănescu Dum., **127**.
Stănescu B. Gh., 7.
Stănescu A. N., 7, 8, 9, 10, 25, 40, 56, 57, 58, 88.
Ştefănescu C., 2, 78.
Ştefănescu Em., 7, 9, **11**, **13**, 25, **29**, 30, 39, 56, 57, 58, 63, 71, 72, 73, 79, 87, 90, 92, 103, 106, 107, **121**, **122**, **134**, **135**, **154**, **156**, 157, 158, 169, 171., 183, 185.
Ştefăniu V., 7, 10, **21**, 25, 26, 27, 39.
Steinbach M., 7, 24.
Stoenescu I. A., 7, **10**, **11**, **23**, 24, 25, 26, 27, 39, 40, 42, 45, 56, 58, **63**, 71, 72, 73, 87, 88, 89, 90, 91, **104**, 105, 106, 107, **110**, **119**, **121**, 122, 135, **136**, **154**, 156, **157**, **169**, 171, 183, 185.
Stoenescu A. E., 7.
Stoenescu I. I., 90.
Stoenescu A. T., 6, 9, 57, **103**.
Stoica I., 7.
Stoicescu G., 50.
Sudan C., 34.
Suluţiu A., 6.
Sufletel A., 7, 10, 25, 42, 56, 57, 58, 71, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 101, 107, 135, 1396, 153, 18

Tauber A., 7, **10**, **21**, 25, 26, 42, 56, 57, 58, 62, **71**, 72. **73**, 87, 89, 90, 92, 104, 107, **121**. **135**, **154**, 156, 169, **170**, **183**, 185,
Ţenea I., 7, 25, 26, 40, 53, 56, 57, 87, 89, 91, 92, 104, **135**, **136**, **156**, 16 , 185.
Tenescu N. V., 7.
Teodorescu C. C., 15, 18, 31, 34, 50, 66, 79, 82, 98, **110**, **111**, **114**, **126**, **127**, **130**, **136**, **142**, **146**, **162**.
Teodorescu I., 7, 25, 26, 38, **40**, 41, 53, 56, 57, 58, **72**, **73**, 86, 88, 91, **103**, **105**, 135, **154**, **156**, **157**, **169**, 185.
Teodorescu N., 157.
Teodoru M., **57**.
Teodoru I. D. **79**,
Teodoru Nicuţă, **10**, **21**, 25, 27, 39, 40, 53, 56, **57**, **58**, **71**, **72**. 73, 87, 88, 90, 104, 106, 107, **121**, 136, **158**, **169**, **171**, **184**, 185.
Tepeneag E., **2**.
Terescenco N., 158.
Thierrin Gh., 34.
Third I. A., 59.
Ţibuleac I., 53.
Timotin D., **127**, 158.
Ţiţeica Gh., 31, **74**, **79**, **175**.
Trincă Marin, 39, 57, 58, **111**, 135, 156, 1 **9**, **175**.
Tuducescu N., **10**, **24**. 57, **71**, **72**, 88, 92, **103**, **106**, **107**, **121**.

Ulman O., **7**, 8, **10**, **24**, **26**, **27**, 39, 53 56, 57, 58, **71**, **72**, 73, 87. **90**, 91, 104, 105, 106, **107**, 119, **120**, **127**, **134**, 135, **154**, 155, **157**, **166**, **168**, **169**, **185**.
Ursescu D. Gh., 25, 40, 56, **57**, 58.
Urzică O., **111** **169**.

Vâlcovici V., **2**, **31**, **111**, **159**.
Vasilache P., 41, 58.
Vasilache S., 42, 56, **57**, 71, 86, 90, **107**, **111**.
Vasile Mihai, 7.
Vasilescu D. I., 87, **104**, **106**, **107**, 135, 169, 185.
Vasilescu C. V., 7, **10**, 25, **26**, 39, 41, 58, **135**, **154**, 155, 185.
Vasiliu D. I., **154**, **171**, **184**.
Vasiliu M. Gh., **12**, 62.
Vasiliu M., 2, 8, 14, **15**, 18, 30, 34, 40, 46, 50, 53, **57**, 66, 82, 88, 98, **114**, **126**, **136**, **142**, **143**, 167.
Vasiliu D. V., 41, 42, 58, **71**, 88.
Vicoveanu C. V., 56, **57**, 58, **156**, 184.
Vidrighin St., 79.
Vincentius B., 7, 8, 56, 57.
Vlad I. V., **2**, 15.
Volitzer S,, **15**.
Vonta A., 6.
Vulcan St. **7**.

Wechsler Beatrice, 42
Wechsler A., 87.
Weissler Doru **169**.
Weiss L., **71**, **90**, 92, **107**, 136, 155, 156, 169, 184, 185.
Weiss Solomon, **184**,
Weissenberg Eug., **7**, 174, 185.
Wetter A., 120, 135
Witzmann M., 174, 18 .

Zamfirescu I. A., 87, 88.
Zamfirescu I. I., **57**, **71**.
Zapan Gr., 9, **10**, 11, 34, 42. 62, **71**, 73, **77**. 73, 102, 109, **110**, **126**, **142**, **159**, **169**.
Zoican A., **7**.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

5 lei